ПЕТЪР ХАДЖИДОБРЕВ

ТЕХНИЧЕСКА МЕХАНИКА

ЗАПИСКИ НА ЛЕКЦИИ

КОЛЕЖ - СЛИВЕН

2020

Учебното пособие „Техническа механика - Курс лекции" е предназначено за студентите от Колеж-Сливен, но може да се използва и от студенти в други висши технически училища.

Учебният материал е разпределен в четири глави по реда на тяхното изучаване – статика, съпротивление на материалите, кинематика и динамика. В сбита и достъпна форма се дават основните принципи и аксиоми, върху които се изгражда механиката на абсолютно твърдото и деформируемото тяло, разглеждат се кинематиката на точка и твърдо тяло и динамиката на материална точка.

Обемът е определен според хорариума на дисциплината от 30 часа лекции, подреден методично според разбирането на автора и изложението е съобразено с паралелното изучаване на необходимия материал по приложна математика.

ПЪРВА ГЛАВА

С Т А Т И К А

1. Основни понятия на статиката.

Статика – изучава и описва равновесието на телата. В статиката равновесие е състоянието на покой на разглежданото тяло спрямо други тела от околната среда, приети условно за неподвижни.

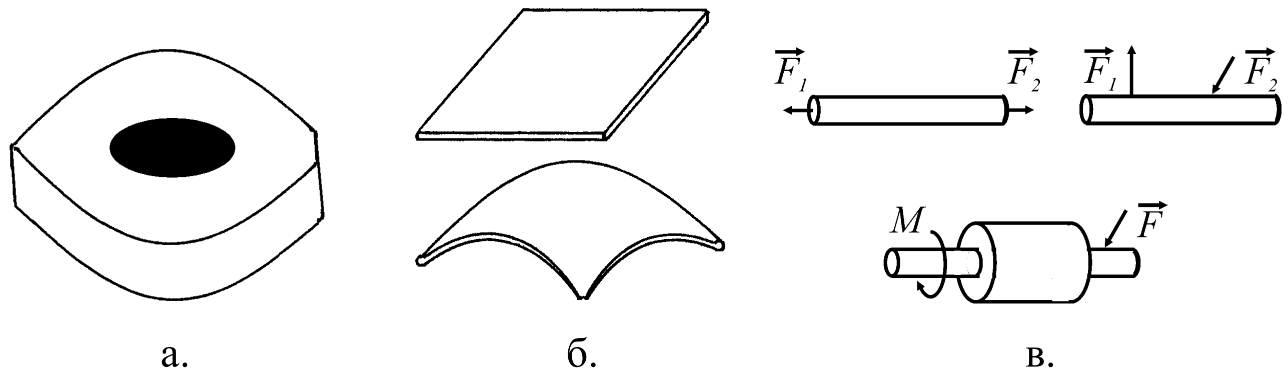
1.1. Основни видове тела.

Материална точка - тяло, чиито размери за разглеждания случай могат да се пренебрегнат в сравнение с разстоянията до други тела.

Идеално твърдо тяло – тяло, за което разстоянията между точките му остават непроменени.

- масивни тела - тела, на които характерните размери са от еднакъв порядък: фиг.1.1.а.

- плочи и черупки - тела, ограничени от две успоредни повърхнини на постоянно разстояние една от друга. Дебелината е значително по-малка от другите размери. При плочите ограничителните повърхнини са равнини, при черупките са с произволна форма: фиг.1.1.б.



Фиг.1.1.

- прътове, греди, валове - тела, на които единият характерен размер е значително по-голям от другите два, които са обикновено с еднакъв порядък. Ако силите са приложени по оста на тялото, то се нарича прът или нишка. Ако силите са под ъгъл спрямо оста на тялото, то се нарича греда. Ако силите създават завъртане на тялото около надлъжната му ос, то се нарича вал: фиг.1.1.в.

Механична система – съвкупност от материални точки и твърди тела, които взаимодействат помежду си.

1.2. Сила.

Сила - векторна величина, която е мярка за взаимодействието между телата. В статиката действието на силите върху неподвижните тела води до промяна на формата и размерите им. При телата, които могат да се движат, силите променят състоянието на движението им.

Единицата за сила в системата SI е наречена Нютон [N]. Тя се дефинира в динамиката като произведение на единицата за маса и единицата за ускорение: килограм по метър за секунда на квадрат:

$1\ N = 1\ kg.\frac{m}{s^2}$.

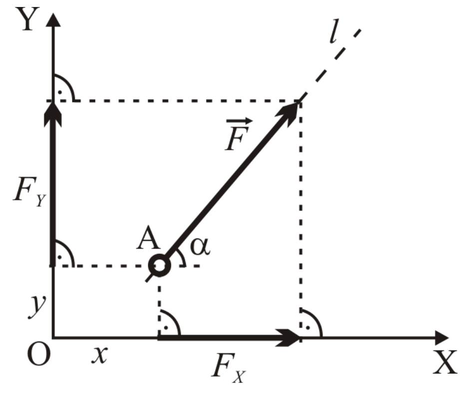
Векторните величини се характеризират с 4 елемента: приложна точка, директриса, посока и големина:

- Приложна точка: мястото A, в което действа векторът. В правоъгълна координатна система приложната точка се задава с нейните координати x и y : A (x , y) - фиг.1.2.

- Директриса: правата линия l, върху която лежи векторът. Тя минава през приложната точка A и в правоъгълна координатна система направлението се задава с ъгъла α, който сключва с някоя от осите на координатната система.

- Посока на вектора: показва дали той съвпада (+), или е обратно (-) на предварително избрана положителна посока върху директрисата.

- Големина на вектора *F*: определя се чрез сравняването му с предварително избрана единица мярка. Представя се с положително число.



Фиг.1.2.

Аналитично векторите се задават с техните проекции върху осите на координатната система. Проекциите F_x и F_y се получават, като от началото и края на вектора се прекарват перпендикуляри към осите на координатната система и са съответно:

$$F_x = F.\cos\alpha \qquad \text{и} \qquad F_y = F.\sin\alpha.$$

Представен с проекциите, векторът се записва:

$$\vec{F} = (\vec{i}\,.F_x + \vec{j}\,.F_y), \qquad \text{или} \qquad \vec{F} = (F_x, F_y).$$

където $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са единичните вектори на осите на координатната система.

Когато векторът е зададен с неговите проекции, от тях могат да се получат големината F и ъгълът α на директрисата:

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2}\ , \qquad \sin\alpha = \frac{F_y}{F}\ , \qquad \cos\alpha = \frac{F_x}{F}\ .$$

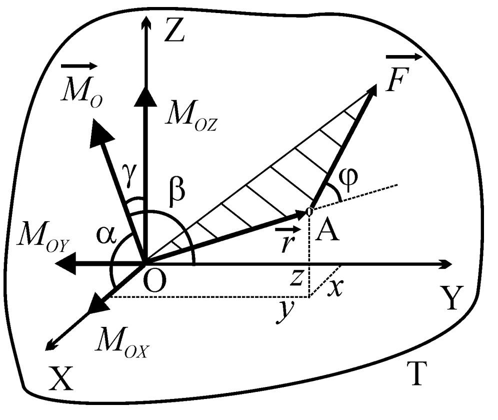
1.3. Момент на сила.

Момент на сила – векторна величина, която характеризира въртеливия ефект при действието на дадена сила върху тяло. В статиката по момента на сила се определя възможността за създаване на въртеливо движение.

Единицата за момент на сила е Нютон по метър [N.m].

За да се определи дали тялото Т ще се завърти около точка О, когато върху него действа силата $\vec{F}$, приложена в точка А с радиус-вектор $\vec{r}$, се намира моментът $\vec{M}_O$, който е векторното произведение:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} .$$



Фиг.1.3.

Радиус-векторът е вектор с проекции $\vec{r} = (x, y, z)$, силата е вектор с проекции $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ - фиг.1.3. Съставя се матрицата на векторното произведение с първи ред единичните вектори *i*, *j* и *k* на осите на координатната система и се намира нейната детерминанта:

$$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & \mathrm{z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \vec{i}.(y.F_z - z.F_y) + \vec{j}.(z.F_x - x.F_z) + \vec{k}.(x.F_y - y.F_x)$$

Векторът $\vec{M}_O$ е с елементи:

- Приложна точка – т.О;

- Големина - $M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$, като проекциите M_{Ox}, M_{Oy} и M_{Oz} са съответно:

$$M_{Ox} = y.F_z - z.F_y, \qquad M_{Oy} = z.F_x - x.Fz, \qquad M_{Oz} = x.F_y - y.F_x \ .$$

Освен чрез проекциите, големината на момента на силата се определя по формулата:

$$M_O = r.F.\sin\varphi ,$$

където φ е ъгъла между радиус-вектора $\vec{r}$ и силата $\vec{F}$.

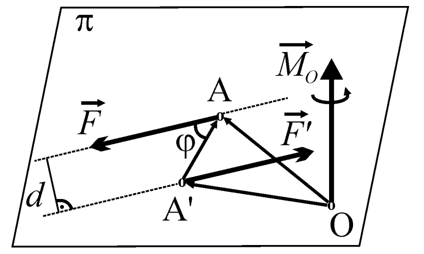
- Директриса – перпендикулярна на равнината, определена от радиус-вектора $\vec{r}$ и силата $\vec{F}$. Ъглите *α, β,* и *γ*, които директрисата сключва съответно с осите x, y и z, се определят по формулите:

$$\cos\alpha = \frac{M_{Ox}}{M_O}\ , \qquad \cos\beta = \frac{M_{Oy}}{M_O}\ , \qquad \cos\gamma = \frac{M_{Oz}}{M_O}\ .$$

- Посока - погледнато срещу момента, създаденото завъртане да е в посока, обратна на часовниковата стрелка.

1.4. Двойка сили.

Двойка сили - система от две сили $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ с успоредни директриси, равни големини и противоположни посоки – фиг.1.4. Директрисите на двете сили определят равнината π на двойката сили. Разстоянието d между директрисите се нарича рамо на двойката сили.



Фиг.1.4.

Ефектът от действието на двойка сили върху тяло е завъртане на тялото. Моментът на двойката сили спрямо произволна точка O от равнината π е:

$$\vec{M}_O = \vec{OA}\times\vec{F} + \vec{OA'}\times\vec{F'} = \vec{OA}\times\vec{F} + \vec{OA'}\times\left(-\vec{F}\right) = \left(\vec{OA} - \vec{OA'}\right)\times\vec{F} = \vec{AA'}\times\vec{F}\ .$$

Моментът на двойката $\vec{M}_O$ има директриса, перпендикулярна на равнината π. Посоката на момента е такава, че погледнато срещу нея, двойката сили да завърта в посока, обратна на часовника. Големината на момента е:

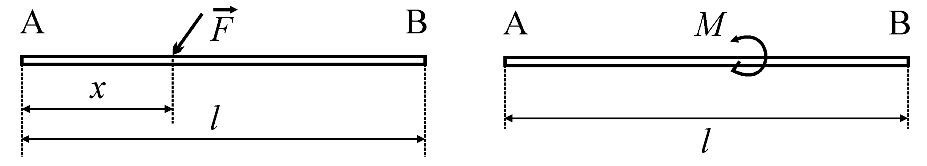
$$M_O = AA'.F.\sin\varphi = F.d\ .$$

Елементите на момента $\vec{M}_O$ на двойката сили не зависят от избора на точката O, спрямо която е намерен. Такъв вектор се нарича свободен вектор и е един и същ за различни точки от равнината.

1.5. Видове натоварвания.

<u>Съсредоточен товар</u> – сили $\vec{F}$ и моменти $\vec{M}$, приложени върху определени точки от тялото – фиг.1.5.

<u>Разпределен товар</u> – множество сили, приложени върху някакъв обем: обемни товари; върху някаква повърхност: повърхностни товари, или върху някаква линия: линейни товари - фиг.1.6.

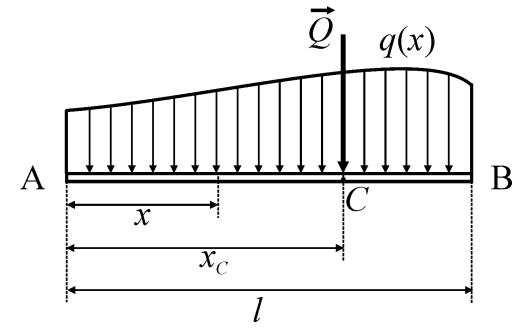


Фиг.1.5.

Характеристика на линейния товар е неговият интензитет $\vec{q}(x)$ в точка от линията:

$$\vec{q}(x) = \frac{d\vec{F}(x)}{dx},$$

където $\vec{F}(x)$ е приложената сила, x е мястото, където е приложена.



Фиг.1.6.

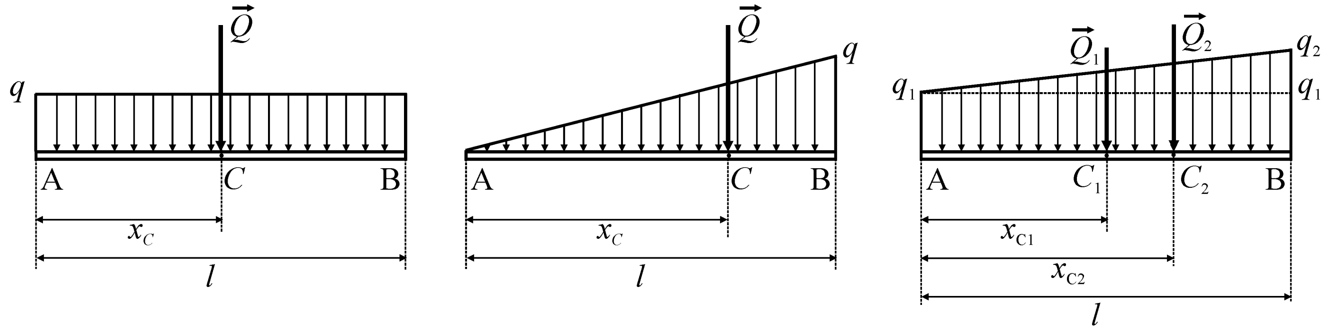
Единицата за интензитет е отношението на единицата за сила към единицата за разстояние: Нютон за метър $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$.

Линейният товар като натоварване се заменя със сила $\vec{Q}$ с приложна точка x_c, съответно:

$$\vec{Q} = \int_0^l \vec{q}(x).dx \qquad \text{и} \qquad x_C = \frac{\int_0^l x.q(x).dx}{Q}.$$

- <u>Правоъгълно разпределен товар</u> - има форма на правоъгълник - фиг.1.7.а. и интензитетът q е постоянен по цялата дължина.

Замества се със сила $\vec{Q} = \vec{q}.l$, приложена в средата: $x_C = \frac{1}{2}.l$.



а. б. в.

Фиг.1.7.

- <u>Триъгълно разпределен товар</u> – има форма на триъгълник – фиг. 1.7.б. и интензитетът $\overrightarrow{q(x)}$ се изменя линейно от нула в единия край до q в другия.

Замества се със сила $\vec{Q} = \frac{1}{2}.\vec{q}.l$, приложена в центъра на тежестта на триъгълника: $x_C = \frac{2}{3}.l$.

- <u>Трапецовидно разпределен товар</u> – има форма на трапец – фиг. 1.7.в. Интензитетът $\overrightarrow{q(x)}$ се изменя линейно от q_1 в единия край до q_2 в другия. Представя се с два товара: правоъгълен с постоянен интензитет q_1 и триъгълен с интензитет от нула до (q_2 - q_1).

1.6. Видове опори и опорни реакции.

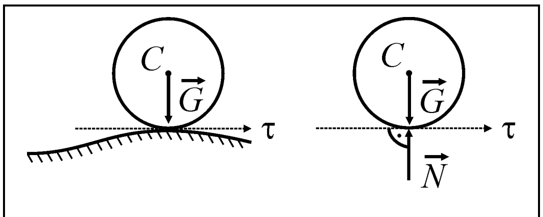
Свободните тела се привеждат в неподвижно състояние чрез прикрепването им към неподвижната околна среда.

<u>Връзка</u> – тяло от неподвижната околна среда, което ограничава движението на свободното тяло.

<u>Опора</u> – устройство, чрез което свободното тяло се свързва с неподвижните тела от околната среда.

В зависимост от начина на закрепване опорите са няколко основни вида:

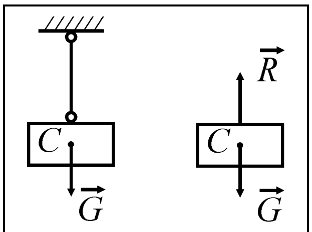
- <u>Гладка повърхност</u> – точка от тялото се допира до повърхността на неподвижно тяло. При допирането възниква опорна реакция $\vec{N}$ с при-



Фиг.1.8.

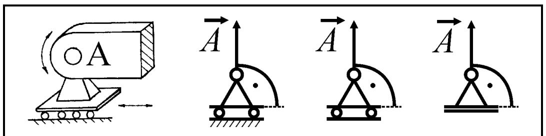
ложна точка допирната точка на тялото с повърхността, директрисата е перпендикулярна на допирателната към повърхността, посоката е навън от повърхността – фиг.1.8. Неизвестна е големината на реакцията.

- <u>Нишка или прът</u> - тялото се свързва с неподвижно тяло чрез междинно тяло - нишка или прът. Опорната реакция $\vec{R}$ е с приложна точка мястото на закрепване на нишката или пръта към тялото, директрисата е по дължината на нишката, посоката е навън от тялото – фиг.1.9. Неизвестна е големината на реакцията.



Фиг.1.9.

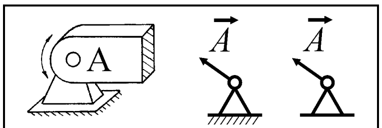
- <u>Подвижна цилиндрична опора</u> – към тялото е прикрепена оста на цилиндрична става, която е поставена върху неподвижното тяло и може да се плъзга по него. Опорната реакция $\vec{A}$ е с приложна точка оста на ставата, директрисата е перпендикулярна на повърхността на движение на ставата – фиг.1.10. Неизвестни са посоката и големината на реакцията.



Фиг.1.10.

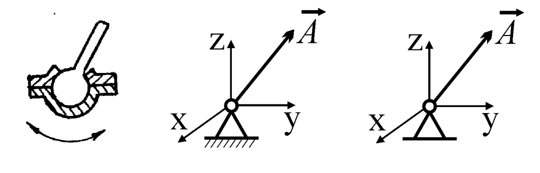
- <u>Неподвижна цилиндрична опора</u> - към тялото е прикрепена оста на цилиндрична става, която е закрепена към неподвижното тяло.

Опорната реакция $\vec{A}$ е с приложна точка оста на ставата – фиг.1.11. Неизвестни са директрисата, посоката и големината на реакцията.



Фиг.1.11.

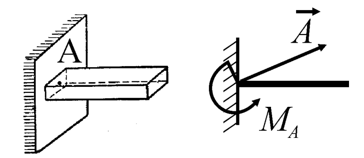
- Неподвижна сферична опора – към тялото е закрепена сфера, поставена в гнездо, закрепено към неподвижното тяло.



Фиг.1.12.

Опорната реакция $\vec{A}$ е с приложна точка центъра на ставата – фиг.1.12. Неизвестни са директрисата, посоката и големината на реакцията.

- Запъната опора – тялото е закрепено неподвижно направо към околната среда.



Фиг.1.13.

Опорните реакции са: сила $\vec{A}$ с приложна точка мястото на запъване и неизвестни директриса, посока и големина, и момент на сила M_A спрямо мястото на запъване и неизвестни посока и големина – фиг.1.13.

2. Аксиоми на статиката.

Аксиомите на статиката са няколко твърдения, основани на очевидни факти, обобщени от опита и наблюденията при изучаване действието на силите върху телата. С тяхна помощ се извеждат законите на статиката и се разработват методи за решаване на задачи.

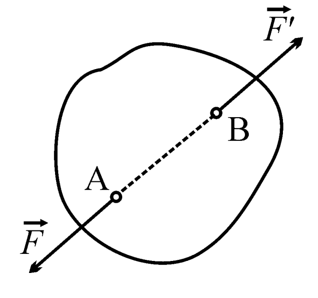
Аксиома 1 – принцип на Нютон за инерцията.

Всяко изолирано тяло се намира в състояние на покой или се движи равномерно праволинейно. Под изолирано тяло се разбира тяло, което не е подложено на действието на сили:

$$\vec{F} = 0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n .$$

Аксиома 2 – равновесие на две сили.

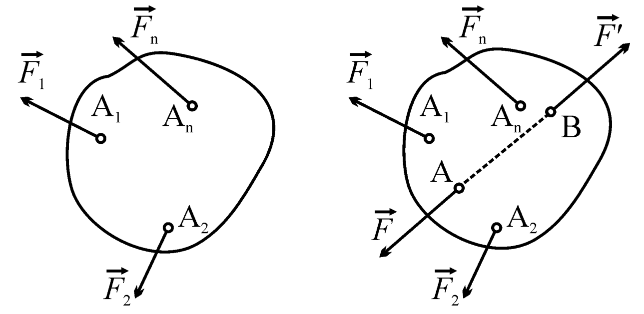
Система от две сили $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ е в равновесие, когато имат обща директриса AB, равни големини и противоположни посоки $\vec{F} = -\vec{F}'$ – фиг.1.14. Такива сили се наричат правопротивоположни.



Фиг.1.14.

Аксиома 3 – еквивалентно преобразуване на система сили.

Ако към дадена система сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2 ... \vec{F}_i ... \vec{F}_n$ се прибавят или премахнат две правопротивоположни сили $\vec{F}, \vec{F}'$, действието на системата не се променя – фиг.1.15.

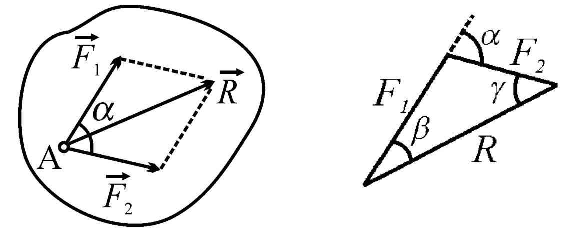


Фиг.1.15.

Аксиома 4 – сума на две сили.

Две неуспоредни сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ с обща приложна точка A могат да се заменят с една сила $\vec{R}$ – фиг.1.16, приложена в същата точка, равна на векторната им сума:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$



Фиг.1.16.

Големината R на силата се намира с косинусовата теорема:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2.F_1.F_2.\cos\alpha} .$$

Директрисата на $\vec{R}$ се определя от ъглите β и γ, които се намират по синусовата теорема:

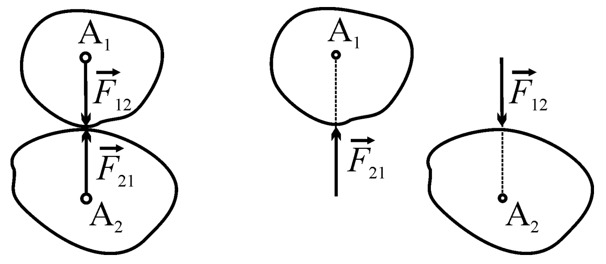
$$\frac{F_1}{\sin\lambda} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180-\alpha)} .$$

Когато силите да зададени с техните проекции: $\vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y})$ и $\vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y})$, проекциите на силата $\vec{R}$ са:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} \qquad \text{и} \qquad R_y = F_{1y} + F_{2y} .$$

Аксиома 5 – принцип на Нютон за действието и противодействието.

На всяко действие $\vec{F}_{12}$ съществува равно по големина и противоположно по посока противодействие $\vec{F}_{21}$ – фиг.1.17.



Фиг.1.17.

Аксиома 6 - принцип на втвърдяването.

Равновесието на едно деформируемо тяло не се променя, ако то се замени със същото такова идеално твърдо тяло.

Аксиома 7 - принцип на разчленяването.

Ако една механична система е в равновесие, всяка нейна съставна част също е в състояние на равновесие.

Аксиома 8 - принцип на освобождаването.

Равновесието на едно тяло не се нарушава, ако мислено се освободи от опорите и се заменят със съответните опорни реакции.

Въз основа на аксиомите на статиката със силите може да се извършват следните елементарни операции:

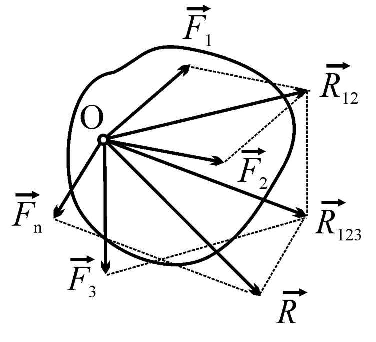
- плъзгане по директрисите;
- прибавяне или премахване на правопротивоположни сили;
- заменяне на две сили с тяхната равнодействаща;
- заменяне на една сила с две сили по правилото на успоредника.

3. Конкурентна система сили. Редукция и равновесие.

Конкурентна (сходяща) система сили – директрисите на силите се пресичат в една точка, която се нарича център на системата сили.

Редукция – привеждане на система сили към възможно най-прост вид. Конкурентната система сили се редуцира до една равнодействаща сила.

Редукцията на конкурентната система сили се извършва чрез последователна замяна на две сили с една съгласно Аксиома 4, до получаване на една единствена сила. Силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ се заменят с $\vec{R}_{12}$: $\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. След това силите $\vec{R}_{12}$ и $\vec{F}_3$ се заменят с $\vec{R}_{123}$: $\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3$, и т.н, докато остане една сила $\vec{R} = \vec{R}_{123} + \vec{F}_n$ - фиг.1.18.



Фиг.1.18

Равнодействащата сила $\vec{R}$ се получава като сума на всички сили от системата.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Когато силите от системата са зададени с техните проекции:

$$\vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y}),\ \vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y}),\ \vec{F}_3 = (F_{3x}, F_{3y}),\ \ldots\ ,\ \vec{F}_n = (F_{nx}, F_{ny}),$$

проекциите на равнодействащата са:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} \text{ и } \qquad R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny}.$$

След като проекциите на равнодействащата са определени, от тях се получават големината R и ъгълът α между директрисата и оста X на координатната система:

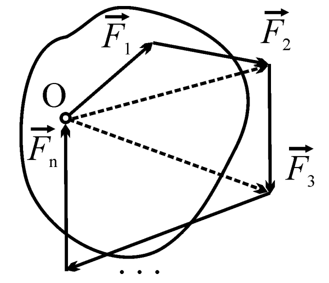
$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}\ , \qquad \sin\alpha = \frac{R_y}{R}\ , \qquad \cos\alpha = \frac{R_x}{R}.$$

Равновесие на конкурентна система сили - когато равнодействащата е нулев вектор.

Векторното условие за равновесие има вида:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0\,.$$

При изпълнено условие за равновесие след графическо събиране на векторите се получава затворен многоъгълник – фиг.1.19.



Фиг.1.19.

Когато силите от системата са зададени с техните проекции, от векторното условие следват скаларни условия за равновесие по осите X и Y на координатната система:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

и

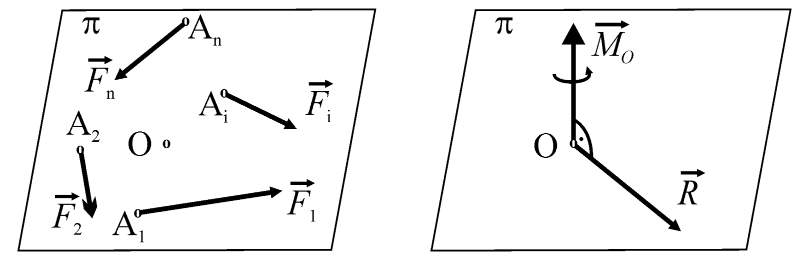
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,.$$

4. Равнинна система сили. Редукция и равновесие.

Равнинна система сили – директрисите на силите лежат в една равнина.

Редукция – извършва се спрямо произволна т.О от равнината, наречена редукционен център – фиг.1.20. След редукцията на равнинната система сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_i \ldots \vec{F}_n$ се получава динàма - съвкупност от:

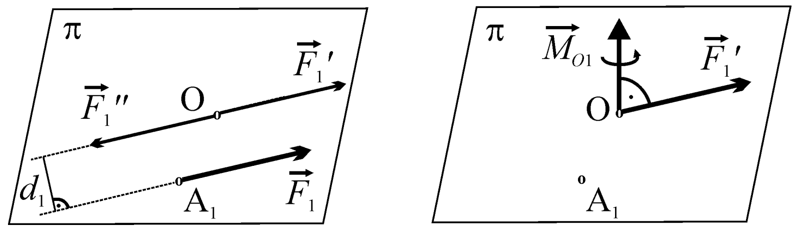
- главен силов вектор $\vec{R}$, приложен в редукционния център т.0, получен като сума от силите $\vec{F}_i$ на системата,



Фиг.1.20.

- главен момент $\vec{M}_O$ спрямо редукционния център т.О, сума от моментите $\vec{M}_{Oi}$ на силите $\vec{F}_i$ спрямо т.О.

За събиране на силите е необходимо те да имат обща приложна точка. Поради това преди извършване на редукцията те се ”премест-ват” от точката, в която са приложени, в редукционния център т.О. За ”преместване” на $\vec{F}_1$ от т.A_1 в т.О се добавя двойка противоположни сили $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_1''$, успоредни и равни на $\vec{F}_1$ - фиг.1.21. Силата $\vec{F}_1'$ остава в т.О, а $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_1''$ са двойка сили и се представят с момента $\vec{M}_{O1} = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1$ с големина $M_{O1} = F_1.d_1$, перпендикулярен на равнината.



Фиг.1.21.

След същите преобразования и за останалите сили се получава конкурентната система $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, ... $\vec{F}_n'$, чиято сума е главният вектор $\vec{R}$ на равнинната система сили:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Сумата от моментите на двойките сили $\vec{M}_{O1}$, $\vec{M}_{O2}$, ... $\vec{M}_{On}$ дава главния момент $\vec{M}_O$ на равнинната система сили:

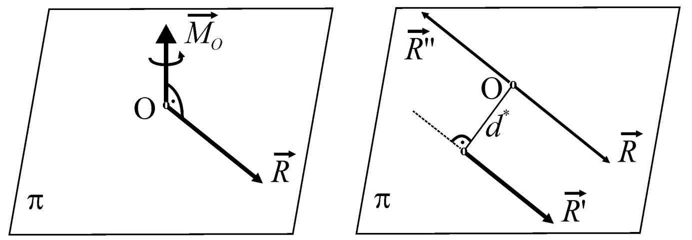
$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} + \ldots + \vec{M}_{On} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} .$$

Главният силов вектор $\vec{R}$ и главния момент $\vec{M}_O$ са перпендикулярни, тъй като след като $\vec{M}_O$ е перпендикулярен на равнината, той е перпендикулярен на всеки вектор, лежащ в нея.

Динàмата $\vec{R}$, $\vec{M}_O$ може да се редуцира до една сила $\vec{R}'$. Това става със замяна на момента $\vec{M}_O$ с двойка сили $\vec{R}'$ и $\vec{R}''$, които са успоредни на главния вектор $\vec{R}$, и $\vec{R}''=-\vec{R}$ - фиг.1.22. Тогава $\vec{R}''+\vec{R}=0$, а рамото на двойката d^* е:

$$d^*=\frac{M_O}{R}.$$

Силата $\vec{R}'$ е върху директриса на разстояние d^* от т.О и се ориентира така, че създаденото от нея завъртане да съответства на момента $\vec{M}_O$.



Фиг.1.22.

<u>Равновесие на равнинна система сили</u> – когато са нулеви главният силов вектор и главният момент на силите.

Векторното условие за равновесие има вида:

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0$$

и

$$\vec{M}_O=\vec{M}_{O1}+\vec{M}_{O2}+\ldots+\vec{M}_{On}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{Oi}=0.$$

Когато силите са зададени с проекции, от векторното условие следват скаларни условия за равновесие по осите X и Y на координатната система, и с условие за равновесие по оста Z за момента:

$$R_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}+\ldots+F_{nx}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0$$

$$R_y=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}+\ldots+F_{ny}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0$$

$$M_O=M_{O1}+M_{O2}+\ldots+M_{On}=\sum_{i=1}^{n}M_{Oi}=0.$$

Освен равновесие на системата са възможни и случаите:

- $\vec{R} = 0$, $\vec{M_O} \neq 0$. Тогава $\vec{M_O}$ се редуцира до двойка сили, моментът на която е свободен и не зависи от точката на редукция.

- $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M_O} = 0$. Резултатът от редукцията е само една сила, която заменя системата сили в редукционния център,.

Определяне на опорните реакции.

Условията за равновесие, които в скаларен вид са 3 на брой, отговарят на броя степени на свобода на едно равнинно сечение на твърдо тяло. За равновесие на тялото е необходимо да се въведат толкова връзки, които, представени с опорните си реакции, да бъдат същия брой колкото са условията на равновесие. Тогава равнинната система сили, включваща дадените известни сили на натоварванията и неизвестните сили на опорните реакции, ще бъде статически определима, т.е. на всяко едно неизвестно съответства едно уравнение от условията за равновесие.

Докато проекциите на силите са само две, то моментови условия за равновесие могат да се напишат за произволен брой точки. Условията за равновесие обаче винаги трябва да бъдат 3 на брой. Освен вариантът, получен по-горе, могат да се напишат моментови условия за равновесие и за други точки A, B и т.н., с които да се заместят условията за равновесие по X и Y:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$M_B = M_{B1} + M_{B2} + \ldots + M_{Bn} = \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0$$

$$M_O = M_{O1} + M_{O2} + \ldots + M_{On} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oi} = 0.$$

или

$$M_A = M_{A1} + M_{A2} + \ldots + M_{An} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0$$

$$M_B = M_{B1} + M_{B2} + \ldots + M_{Bn} = \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0$$

$$M_O = M_{O1} + M_{O2} + \ldots + M_{On} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oi} = 0.$$

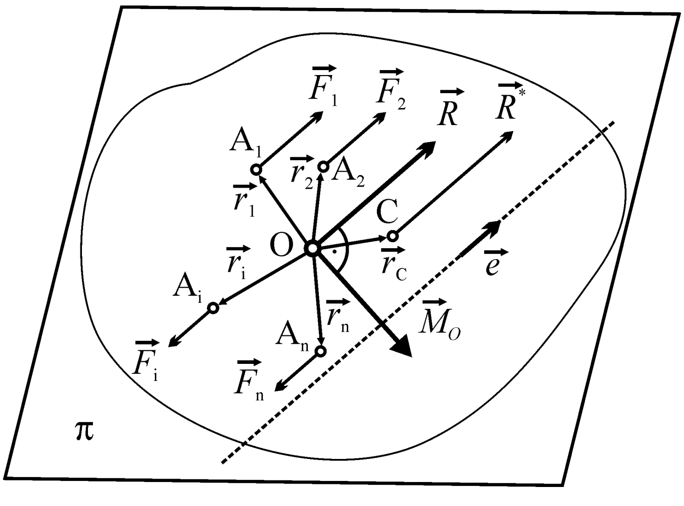
5. Система успоредни сили. Редукция и равновесие. Център на тежестта.

Система успоредни сили – директрисите на силите, които действат върху дадено тяло, са успоредни една на друга. Успоредните сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_i \ldots \vec{F}_n$ са приложени в т. A_1, A_2, A_i, ... A_n. – фиг.1.23.

Редукция - прави се спрямо произволна точка О, наречена редукционен център. След редукцията се получава динàма - съвкупност от:

- главен силов вектор $\vec{R}$, приложен в редукционния център т.О, получен като сума от силите $\vec{F}_i$ на системата,

- главен момент $\vec{M}_O$ спрямо редукционния център т.О, сума от моментите $\vec{M}_{Oi}$ на силите $\vec{F}_i$ спрямо т.О.



Фиг.1.23.

За извършване на редукцията е необходимо силите да се „поставят” върху обща директриса *l*, минаваща през т.О, при което се появяват моментите им $\vec{M}_{O1}$, $\vec{M}_{O2}$, $\vec{M}_{Oi}$, ... $\vec{M}_{On}$ спрямо т.О.

Силите $\vec{F}_i$ се представят чрез единичния вектор $\vec{e}$ на директрисата: $\vec{F}_i = F_i.\vec{e}$, където F_i е големината на силата. За главния силов вектор се получава:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n}F_i.\vec{e} = R.\vec{e}.$$

Моментите на силите спрямо т.О са: $\vec{M}_{Oi} = \vec{r}_i \times F_i.\vec{e} = F_i.\vec{r}_i \times \vec{e}$. За главния момент на силите се получава:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n}\left(F_i.\vec{r}_i \times \vec{e}\right) = \sum_{i=1}^{n}F_i.\vec{r}_i \times \vec{e}.$$

Тъй като $\vec{M}_O \perp \vec{e}$, то $\vec{M}_O \perp \vec{R}$. В такъв случай системата успоредни сили може да се редуцира до една сила $\vec{R}^* = \vec{R}$ с приложна точка С с радиус-вектор $\vec{r}_C$, за която: $\vec{r}_C \times \vec{R}^* = \vec{M}_O$. Но $\vec{R}^* = R^*.\vec{e}$ и $\vec{r}_C \times \vec{R}^* = R^*.\vec{r}_C \times \vec{e}$. Тогава $R^*.\vec{r}_C \times \vec{e} = \sum_{i=1}^{n}F_i.\vec{r}_i \times \vec{e}$ и за радиус-вектора на приложната точка С на равнодействащата $\vec{R}^*$ се получава:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}F_i.\vec{r}_i}{R^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n}F_i.\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}.$$

Точката С, в която е приложена равнодействащата $\vec{R}^*$, се нарича център на системата успоредни сили.

Когато радиус-векторът на центъра на системата успоредни сили е представен чрез неговите проекции: $\vec{r}_C = (x, y, z)$, координатите на центъра се определят по формулите:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}F_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}F_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}F_i.z_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}.$$

Равновесие на система успоредни сили – когато са нулеви главният силов вектор и главният момент на силите.

Векторното условие за равновесие има вида:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

и

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} + \ldots + \vec{M}_{On} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} = 0.$$

Когато силите са зададени с проекции, от векторното условие следват скаларни условия за равновесие по осите X, Y и Z на координатната система:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oix} = 0, \qquad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oiy} = 0, \qquad M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oiz} = 0.$$

Освен равновесие на системата са възможни и частните случаи:

- $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$. Тогава $\vec{M}_O$ се редуцира до двойка сили, моментът на която е свободен и не зависи от точката, за която се извършва редукцията.

- $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O = 0$. Резултатът от редукцията е само една сила, равнодействаща, приложена в редукционния център, с която може да се замени системата успоредни сили.

Център на тежестта – точката, в която е приложена равнодействащата на успоредните сили на тежестта, действащи върху система материални точки.

Когато системата успоредни сили са сили на тежестта: $\vec{F}_i = \vec{G}_i = m_i.\vec{g}$, където m е масата, $\vec{g}$ е земното ускорение, след заместването им във формулата за определяне на положението на центъра на системата сили се получава:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i.\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.g.\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i.g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

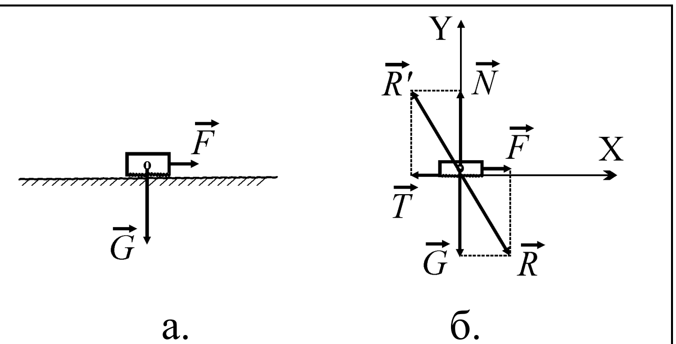
Когато радиус-векторът на центъра на системата успоредни сили е представен чрез неговите проекции: $\vec{r}_C = (x, y, z)$, координатите на центъра на тежестта се определят по формулите:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}.$$

6. Сила на триене.

6.1. Същност на силата на триене.

Сила на триене възниква при контакт между две тела, когато те са притиснати едно към друго. В мястото на контакта грапавините на двете тела навлизат едни в други и се противопоставят на взаимното плъзгане на телата – фиг.1.24.а. Силата на триене е реакция, противопоставяща се на приложена външна сила върху дадено тяло. В зависимост от начина на прилагане на външните сили и силите на реакциите към тялото, е



Фиг.1.24.

възможно то да извърши два вида движения – плъзгане и търкаляне. Към случаите на движение на тялото се преминава след като се нарушат условията за равновесие, които осигуряват покой на тялото.

6.2. Триене при плъзгане.

Плъзгане се наблюдава най-вече при плоски тела. Когато върху тяло в покой действат силите $\vec{G}$ - перпендикулярна на повърхността, и $\vec{F}$ - успоредна на повърхността, тези сили създават съответните реакции $\vec{N}$ - нормална реакция, и $\vec{T}$ - сила на триене - фиг.1.24.б.

При покой на тялото са изпълнени условията за равновесие. Записани по осите X и У, те са:

$$F - T = 0, \quad \text{или} \quad T = F$$

и

$$N - G = 0, \quad \text{или} \quad N = G.$$

При плавно увеличаване на големината на силата $\vec{F}$ равновесието се запазва до достигане на някаква максимална гранична стойност T_0 на силата на триене: $T \leq T_0$. Граничната стойност на силата триене е пропорционална на нормалната реакция: $T_0 = \mu_0.N$, където μ_0 е коефициент на триене при покой за плъзгане и е безразмерна величина. Той зависи от веществото на телата и от състоянието на триещите се повърхности.

Елементите на вектора на силата на триене са:

- приложна точка – допирната точка на тялото с контактната повърхност,

- директриса – успоредна на повърхността, на която лежи тялото,

- посока – обратна на възможното преместване на тялото под действието на приложените върху него сили,

- големина – ограничава се от неравенството:

$$T \leq \mu_0 . N \, .$$

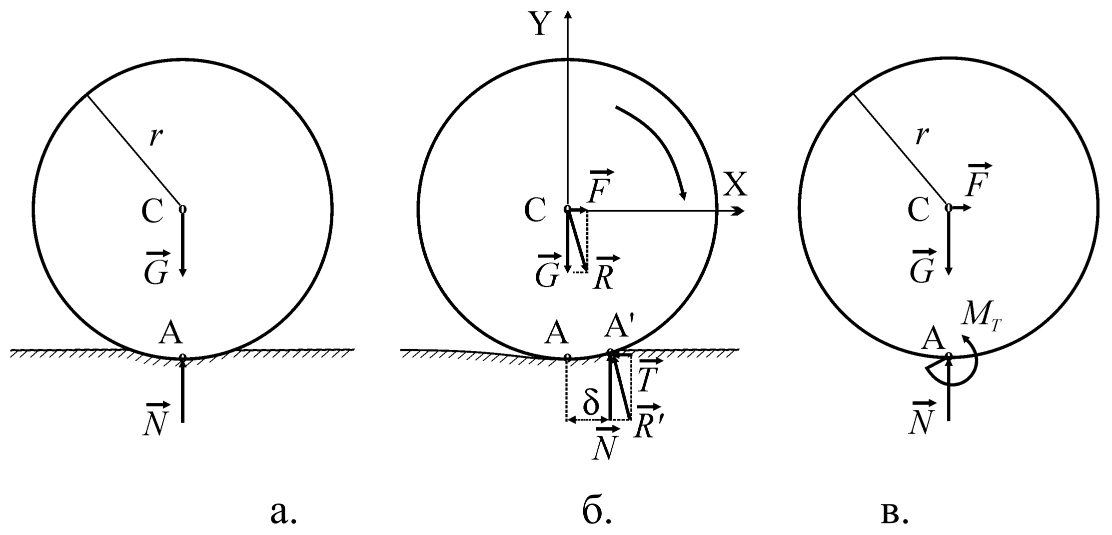
Когато покоят на тялото се наруши при $F \geq \mu_0 . N$, големината на силата на триене приема точно определена стойност, която се дава с формулата:

$$T = \mu . N \, ,$$

където μ е коефициент на триене при плъзгане с големина, малко по-малка от коефициента на триене при покой μ_0.

6.3. Триене при търкаляне.

Търкаляне се наблюдава най-вече при валчести тела. Когато кръгло тяло с тегло $\vec{G}$ се постави върху хоризонтална повърхност, тя се деформира симетрично около допирната точка А – фиг.1.25.а. При действие на сила $\vec{F}$ върху тялото, успоредно на повърхността, деформацията се отмества в посоката на действие на силата и допирната точка е А' – фиг.1.25.б. Деформирането на повърхността задържа тялото в покой.



Фиг.1.25.

Действащите сили върху тялото $\vec{G}$ и $\vec{F}$ са приложени в т.С, а съответните реакции, $\vec{N}$ - нормалната реакция и $\vec{T}$ - силата на триене, са приложени в т. А'.

За това разположение на силите при покой на тялото условията за равновесие по осите X, У и спрямо т.С са:

$$F - T = 0, \qquad \text{или} \qquad T = F,$$

$$N - G = 0, \qquad \text{или} \qquad N = G,$$

$$\delta.N - r.T = 0, \qquad \text{или} \qquad \delta.N = r.T = r.F.$$

Моментът на нормалната реакция $M_T = \delta.N$ се нарича момент на триенето и се противопоставя на търкалянето на тялото.

При плавно увеличаване на големината на силата $\vec{F}$ равновесието се запазва до достигане на някаква максимална гранична стойност момента на триене: $M_T \leq M_{T0}$. Граничната стойност е пропорционална на нормалната реакция: $M_{T0} = \delta_0.N$, където δ_0 е коефициент на триене при покой за търкаляне и има размерност на дължина.

Когато покоят на тялото се наруши, големината на момента на триене приема точно определена стойност, която се дава с формулата:

$$M_T = \delta.N,$$

където δ е коефициент на триене при търкаляне с големина, малко по-малка от коефициента на триене при покой δ_0.

Условия за покой на тялото, да няма плъзгане и търкаляне, са:

$$F \leq \mu_0.N \qquad \text{и} \qquad F \leq \frac{\delta_0.N}{r}.$$

Само плъзгане, без търкаляне, ще има при условие че:

$$F \geq \mu_0.N \qquad \text{и} \qquad F \leq \frac{\delta_0.N}{r}.$$

Само търкаляне, без плъзгане, ще има при условие че:

$$F \leq \mu_0.N \qquad \text{и} \qquad F \geq \frac{\delta_0.N}{r}.$$

Търкаляне и плъзгане, ще има при условие че:

$$F \geq \mu_0.N \qquad \text{и} \qquad F \geq \frac{\delta_0.N}{r}.$$

ВТОРА ГЛАВА

СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА МАТЕРИАЛИТЕ

1. Основни понятия на съпротивление на материалите.

Съпротивление на материалите - изучава реалните тела, които под действието на външни сили се деформират - изменят своята форма и размери, и при определени стойности на външните сили могат да се разрушат.

Твърди тела - състоят се от молекули, свързани помежду си с вътрешни сили на взаимодействие.

Ненапрегнато състояние - когато тялото не е натоварено с външни сили и вътрешните сили държат частиците в равновесно положение.

Напрегнато състояние - когато тялото е натоварено с външни сили. Прилагането на външни сили нарушава нормалните разстояния между молекулите и телата се деформират. При това се изменя нормалното междумолекулно взаимодействие и в телата възникват допълнителни вътрешни сили, които противодействат на деформацията и се стремят да върнат частиците на телата в първоначалното им състояние.

Деформацията на тялото е ограничена. Когато външните сили достигнат определени стойности за даден материал, вътрешните сили не могат да ги уравновесят и тялото се разрушава.

1.1. Механични свойства на материалите.

Свойството на твърдите тела да възстановяват първоначалните си форма и размери след премахване на действието на външните сили се нарича еластичност, а деформацията, която изчезва – еластична деформация. Абсолютно еластични тела не съществуват. Всички материали при определени стойности на външните сили имат остатъчна деформация, т.е. след премахване на действието на външните сили телата не възстановяват първоначалните си форма и размери. Тази деформация се нарича пластична деформация.

Идеално еластичното тяло има еластична или изчезваща деформация. Идеално пластичното тяло има пластична или остатъчна деформация. Реалните тела са еластопластични.

В машинните елементи трябва да има само еластични деформации. За да е изпълнено това условие, в техническата литература се посочва най-голямата допустима деформация, до която за елемента е изпълнено това условие. Максималната стойност на допълнителните вътрешни сили, при която тялото се разрушава, се нарича якост на материала.

1.2. Предмет и задачи на съпромата.

Основната задача на Съпротивление на материалите е такова оразмеряване на детайлите, че да се осигури противодействие на зададени външни сили без да се разруши детайлът и деформациите да бъдат в границите на допустимото при най-малък разход на материал.

Към детайлите, изготвени от съответните материали, се поставят изисквания за:

- якост - да издържат натоварването без да се разрушат;
- коравина – да не се деформират повече от допустимото;
- устойчивост – да запазват формата си;
- икономичност – да имат ниска цена.

1.3. Основни принципи и хипотези на съпромата.

За изучаване на вътрешното състояние на материала под действието на външните сили се правят някои опростяващи допускания и предположения, които са в съгласие с опита:

1. Непрекъснатост и хомогенност - материята изпълва равномерно и без празнини целия обем на тялото.

2. Изотропност - механичните свойства на материала са едни и същи във всички направления. Когато това допускане не е изпълнено, материалът се нарича анизотропен.

3. Идеална еластичност - при натоварване до границата на еластичността, телата след премахване на натоварването възстановяват напълно началната си форма и размери.

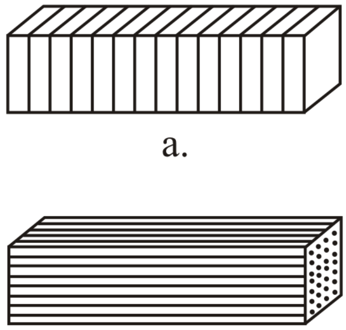
4. Принцип на неизменни начални размери - при натоварване в границите на еластичност промените на размерите са пренебрежимо малки.

5. Принцип на суперпозицията - резултатът от едновременното действие на няколко сили е равен на сумата от резултатите от прилагането на силите поединично в произволен ред.

6. Хипотеза на Бернули - дава начините за представяне на структурата на права греда:

- Чрез идеално твърди плочки, които преди натоварването са успоредни помежду си. При деформацията те могат да се преместват и завъртат, но остават винаги перпендикулярни на деформираната ос на гредата - фиг.2.1.а.

- Чрез сноп от тънки нишки, които преди натоварването са успоредни на оста на гредата. При деформацията те могат да се изкривяват, удължават и скъсяват независимо една от друга, но остават винаги успоредни на деформираната ос на гредата - фиг.2.1.б.


а. б.

Фиг.2.1.

2. Метод на сечението за определяне на вътрешните усилия.

2.1. Вътрешни сили.

Силите, с които външни тела действат на разглежданото тяло, се наричат външни сили (активни и опорни реакции). Тези сили се разглеждат в статиката.

Силите, запазващи цялостта на телата (силите на взаимодействие), се наричат вътрешни сили. Те съществуват в естественото ненапрегнато състояние на тялото и в напрегнатото състояние, като нарастват при деформирането му.

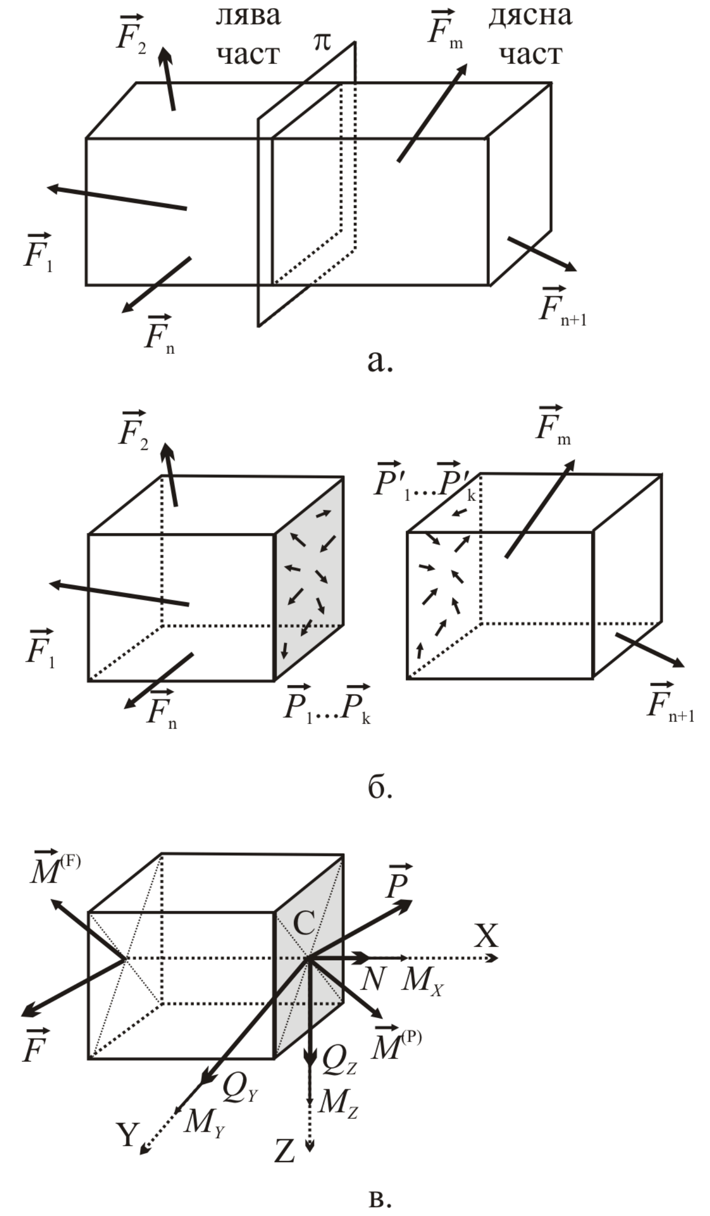
В съпротивление на материалите вътрешните сили са само тези, възникващи допълнително в резултат на деформиране на тялото.

2.2. Метод на сечението.

Вътрешните сили са произволно разпределени в дадено сечение на тялото. За тяхното определяне се прилага методът на сечението, чиято същност е следната. Разглежда се основен модел в съпромата - права греда с правоъгълно сечение – фиг.2.2.а. Гредата е натоварена с външни сили $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n,\vec{F}_{n+1}...\vec{F}_m$, които включват активните сили и опорните реакции. При натоварване с такава пространствена система сили гредата е в равновесие и получава съответната деформация.

За получаване на вътрешните сили, в гредата се прави сечение с равнина π, перпендикулярно на оста на гредата, след което сечението мислено се мести по дължината на гредата.

Сечението разделя гредата на лява и дясна част, като лявата и дясната част също са в равновесие. В лявата част действат част от външните сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ и появилите се огромен брой малки вътрешни сили $\vec{P}_1, ..., \vec{P}_k$. В дясната част на гредата остават външните сили $\vec{F}_{n+1}, ..., \vec{F}_m$ и вътрешните сили $\vec{P'}_1, ..., \vec{P'}_k$, които са правопротивоположни на вътрешните сили за другата част $\vec{P}_1, ..., \vec{P}_k$ - фиг.2.2.б.



Фиг.2.2.

За опростяване на системите на външните и вътрешните сили, за всяка поотделно, се прави редукция спрямо геометричния център на сечението т.С – фиг.2.2.в. След редукцията се получава:

- динàма на външните сили с известни елементи - главният силов вектор $\vec{F}$ и главният момент $\vec{M}^{(F)}$ на системата:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \text{и} \qquad \vec{M}^{(F)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(F)} .$$

- динàма на вътрешните сили с неизвестни елементи - главният силов вектор $\overrightarrow{P}$ и главният момент $\overrightarrow{M^{(P)}}$ на системата:

$$\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{P_i} \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{M^{(P)}} = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{M_i^{(P)}} .$$

Тъй като лявата част е в равновесие, е изпълнено векторното условие за равновесие:

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} = 0 \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{M^{(F)}} + \overrightarrow{M^{(P)}} = 0 .$$

За получаване на аналитични условия за равновесие векторите $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{M^{(F)}}$, $\overrightarrow{P}$ и $\overrightarrow{M^{(P)}}$ се проектират върху подходящо подбрана *координатна система CXYZ, като оста CX съвпада с оста на гредата,* оста CZ е надолу, оста CY е навън от чертежа. Векторите и моментите на вътрешните сили се представят с проекциите:

- Нормално усилие N. При наличие само на нормално усилие деформацията на гредата е на опън при $N > 0$ или натиск при $N < 0$.

- Тангенциални усилия Q_y и Q_z. При наличие само на тангенциално усилие деформацията на гредата е на срязване по осите CY и CZ.

- Огъващи моменти M_y и M_z. При наличие само на огъващ момент деформацията на гредата е огъване около оста CY и CZ.

- Усукващ момент M_x. При наличие само на усукващ момент деформацията на гредата е усукване около оста OX.

Представени чрез проекциите, векторите и моментите на външните и вътрешните сили имат вида:

$$\overrightarrow{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k} \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{M^{(F)}} = M_x^{(F)}.\vec{i} + M_y^{(F)}.\vec{j} + M_z^{(F)}.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P} = N.\vec{i} + Q_y.\vec{j} + Q_z.\vec{k} \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{M^{(P)}} = M_x.\vec{i} + M_y.\vec{j} + M_z.\vec{k} .$$

Условията за равновесие, записани чрез проекциите, имат вида:

$$F_x + N = 0 \qquad\qquad M_x^{(F)} + M_x = 0$$
$$F_y + Q_y = 0 \qquad \text{и} \qquad M_y^{(F)} + M_y = 0$$
$$F_z + Q_z = 0 \qquad\qquad M_z^{(F)} + M_z = 0$$

След решаване на тази система уравнения се получават неизвестните проекции на вътрешните сили и моменти. Тъй като сечението на гредата се мести мислено по оста OX, получените величини са функции на координатата x на сечението:

$$N = N(x); \qquad Q_y = Q_y(x); \qquad Q_z = Q_z(x);$$

$$M_x = M_x(x); \qquad M_y = M_y(x); \qquad M_z = M_z(x).$$

Когато системата външни сили е равнинна и лежи в равнина на симетрия на гредата, остават три условия за равновесие:

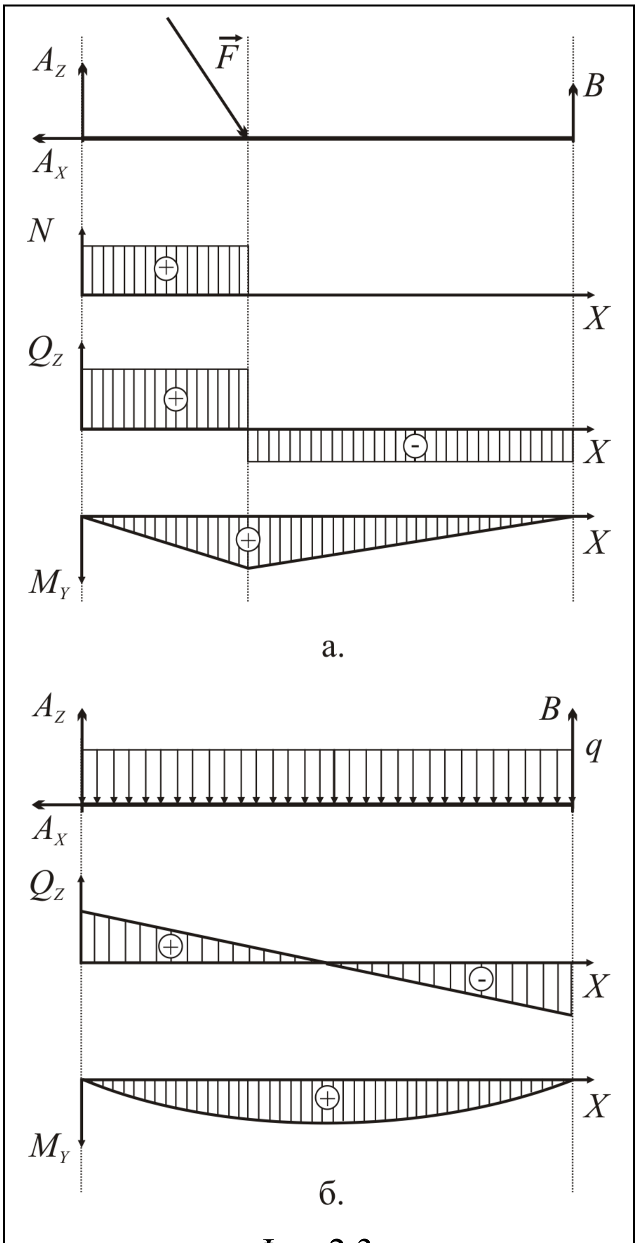
$$N + F_x = 0$$
$$Q_z + F_z = 0$$
$$M_y + M_y^{(F)} = 0$$

Разпределението на нормалното, тангенциалното усилие и огъващия момент по дължината на гредата се представя с диаграми, които са графично изобразяване на функционалните зависимости $N = N(x)$, $Q_z = Q_z(x)$ и $M_y = M_y(x)$. Диаграмите се чертаят под разглежданата греда, използвана при определянето на опорните реакции. На фиг.2.3. са показани диаграмите на вътрешните усилия за греда, натоварена с една сила в общо положение– фиг. 2.3.а. и на греда, натоварена с равномерно разпределен товар по цялата дължина фиг.2.3.б.

2.3. Механично напрежение.

За определяне на направлението и концентрацията на вътрешните сили във всяка точка на сечението се въвежда характеристика, която е мярка на интензивността на вътрешните сили.

Стойността на вътрешните сили върху единица площ на сечението за коя да е негова точка се нарича напрежение. От вида на напрежението зависи получената деформация на тялото.

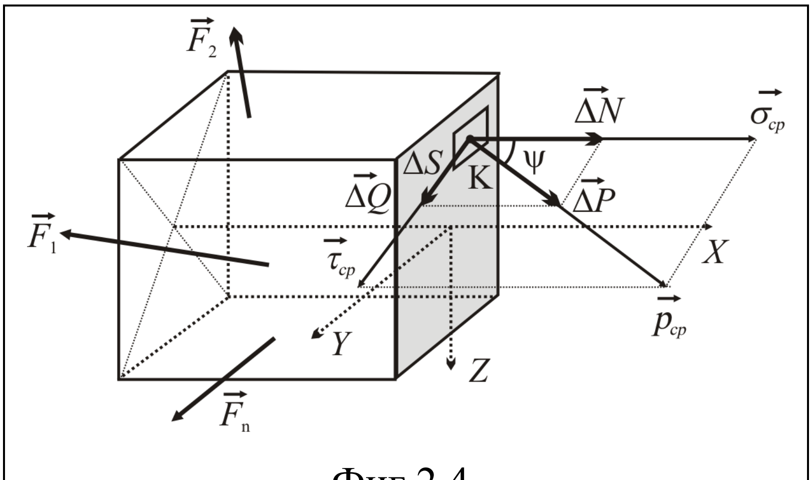


Фиг.2.3.

Средното напрежение $\vec{p}_{cp}$ се определя за малка площ от сечението с големина ΔS, върху която действат вътрешни сили с главен вектор $\vec{\Delta P}$ – фиг.2.4.

Средното напрежение е:

$$\vec{p}_{cp} = \frac{\vec{\Delta P}}{\Delta S}$$



Фиг.2.4.

Когато площта ΔS около т. К се намалява и клони към 0, се получава напрежението $\vec{p}$ в т.К:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} = \frac{d\vec{P}}{dS}$$

Напрежението в т.К е първата производна на главния вектор на вътрешните сили $\vec{P}$ спрямо площта S. Единицата за напрежение в система SI е Нютон за квадратен метър - $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$.

В най-общия случай векторът $\Delta\vec{P}$ сключва ъгъл ψ с нормалата към сечението, успоредна на външната нормала X и има проекции нормално усилие ΔN и тангенциално усилие ΔQ. По същия начин се дефинират и съответните напрежения:

- средно нормално напрежение σ_{cp} и нормално напрежение σ:

$$\sigma_{cp} = \frac{\Delta N}{\Delta S} \qquad \text{и} \qquad \sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = \frac{dN}{dS};$$

- средно тангенциално напрежение τ_{cp} и тангенциално напрежение τ:

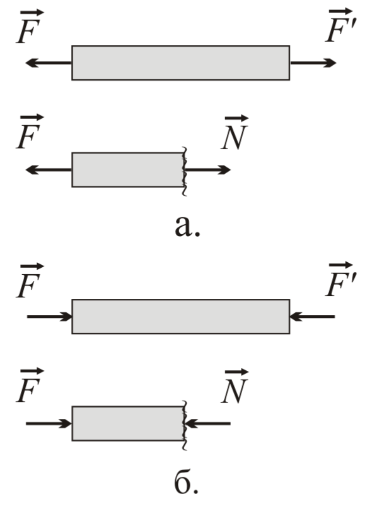
$$\tau_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \qquad \text{и} \qquad \tau = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}.$$

Тъй като нормалното σ и тангенциалното τ напрежение са проекции на напрежението $\vec{p}$, те са свързани със зависимостите:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \qquad \sigma = p.\cos\psi, \qquad \tau = p.\sin\psi.$$

3. Съпротивление на опън и натиск.

Съпротивление на опън и натиск се появява, когато в напречното сечение на тялото възниква само нормално вътрешно усилие $\vec{N}$. Това се получава при действието на две правопротивоположни сили $\vec{F}$ и $\vec{F'}$ с директриси, съвпадащи с оста на тялото. При чист опън нормалното усилие е насочено навън от тялото и се приема за положително - $N > 0$ - фиг.2.5.а., а при чист натиск нормалното усилие е насочено навътре към тялото и се приема за отрицателно - $N < 0$ - фиг.2.5.б.



Фиг.2.5.

3.1. Характеристики на деформациите при опън и натиск.

При опън и натиск се наблюдава промяна на размерите на тялото. При опън нараства дължината, а намаляват напречните размери - фиг.2.6.а. При натиск дължината намалява, а напречните размери се увеличават – фиг.2.6.б. Като характеристики на тези изменения се въвеждат следните величини:

- абсолютно удължение Δl - разликата между крайната l и началната l_0 дължина:

$$\Delta l = l - l_0,$$

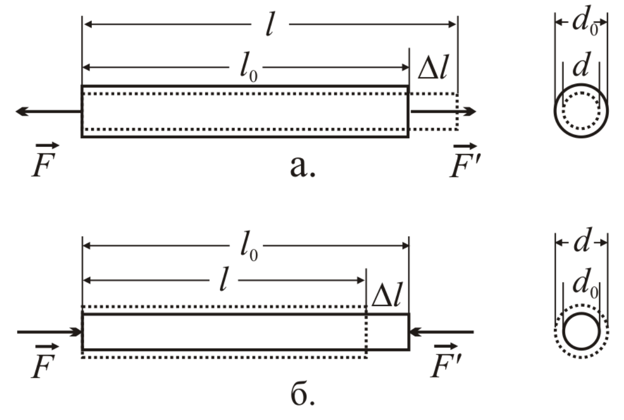
като при опън $\Delta l > 0$, а при натиск $\Delta l < 0$.

- относително удължение ε – абсолютното удължение за единица от началната дължина. Това е отношението на абсолютното удължение Δl към началната дължина l_0:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

за опън $\varepsilon > 0$, за натиск $\varepsilon < 0$.

Относителното удължение се дава и в проценти - $\varepsilon\,[\%] = \varepsilon.100$.



Фиг.2.6.

- абсолютно свиване Δd - разликата между крайния d и началния d_0 напречен размер:

$$\Delta d = d - d_0,$$

при опън $\Delta d < 0$, при натиск $\Delta d > 0$.

- относително свиване $\bar{\varepsilon}$ – абсолютното свиване за единица от началната дебелина. Това е отношението на абсолютното напречно свиване Δd към началния напречен размер d_0

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta d}{d_0},$$

при опън $\bar{\varepsilon} < 0$, при натиск $\bar{\varepsilon} > 0$.

Относителното напречно свиване се представя и в проценти: $\bar{\varepsilon}$ [%] = $\bar{\varepsilon}$.100.

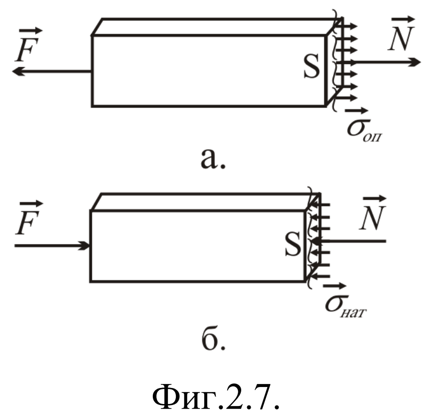
Установено е, че за всеки материал между надлъжната и напречната деформация съществува постоянно отношение, представено чрез коефициента на Поасон μ:

$$\mu = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

За металите коефициентът на Поасон приема следните стойности:

$$\mu = 0{,}20 \div 0{,}35.$$

3.2. Напрежение в напречното сечение.



Фиг.2.7.

При опън и натиск разрезните сили в сечението са с директриси по оста на тялото и са равномерно разпределени по площта на сечението – фиг.2.7. В сечението се получава нормално напрежение. При големина на площта S за нормалното напрежение при опън $\sigma_{оп}$ и натиск $\sigma_{нат}$ се получава:

$$\sigma_{оп} = \frac{N}{S} > 0 \qquad \text{и} \qquad \sigma_{нат} = \frac{N}{S} < 0.$$

3.3. Деформационно уравнение.

Деформационното уравнение дава връзката между създадената деформация ε и съответстващото и напрежение σ. Установена е от английския физик Роберт Хук като закон на Хук за нормалното напрежение:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

Константата E се нарича се модул на линейната деформация или модул на Юнг и се измерва в Нютон за квадратен метър - $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$.

След заместване на σ и ε в горната формула, се получава деформационното уравнение за абсолютното удължение Δl:

$$\Delta l = \frac{N}{E.S}.l_0.$$

По тази формула може да се определи абсолютното удължение при известна сила, начална дължина, модул на линейната деформация и площта на сечението. Произведението $K = E.S$ се нарича коравина при опън и натиск.

3.4. Механични характеристики.

Безопасната работа на елементите на машините зависи основно от физико-механичните свойства на материалите. Тези свойства се изследват в лабораторни условия, като образците се натоварват до разрушаване. Те могат да бъдат подложени на различни деформации: опън, натиск, срязване, огъване и усукване. Най-разпространени са изпитванията на опън, тъй като механичните характеристики, получени при опън, позволяват сравнително точно да се определи поведението на материала при другите видове деформации.

По механични свойства материалите могат да бъдат разделени на две групи: пластични (жилави) и крехки. При пластичните материали (стомана, бронз, мед и др.) разрушаването на материала се предшества от значителна остатъчна деформация. Крехките (чугун, някои специални стомани) се разрушават при много малка остатъчна деформация.

Зависимостта на напрежението σ от деформацията ε на фиг.2.8. показва поведението на материал при опън-натиск за пластични материали. Характерните точки от диаграмата са следните:

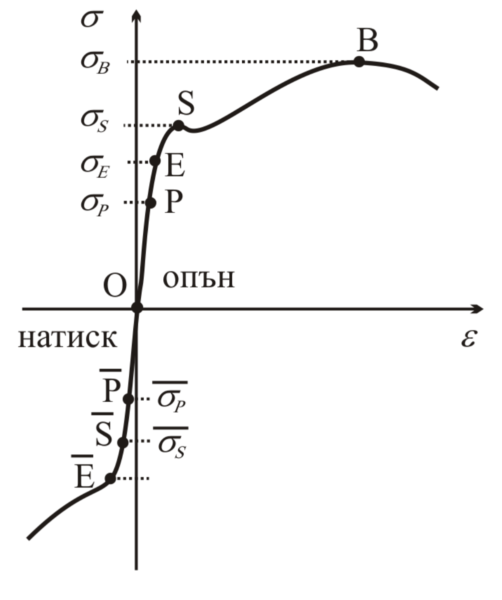
- т. P - граница на пропорционалност σ_P, до която е в сила законът на Хук;

- т. E - граница на еластичност σ_E, до която деформациите са еластични и при разтоварване на образеца изчезват;

- т. S - граница на провлачване σ_S. В тази точка се появяват големи пластични деформации и материалът започва да се „провлачва”;

- т. B - якост на материала σ_B. Точката съответства на момента, когато образецът започва да се разрушава.

Точките $\overline{P}, \overline{E}, \overline{S}$ определят съответните граници при изпитване на натиск.



Фиг.2.8.

3.5. Изчислително уравнение.

Изчислителното уравнение дава необходимите размери на дадено тяло, за да отговаря то на изискванията за якост и коравина.

За да е изпълнено изискването за якост, за различните материали е необходимо най-големите напрежения в елементите да не надхвърлят някаква гранична опасна стойност $\sigma_{\text{гр}}$, която за пластичните материали е границата на провлачване σ_S, а за крехките е границата на якост σ_B.

Допустимото напрежение осигурява якостта и коравината на елементите при най-неблагоприятните условия на работа, затова то трябва да бъде по-малко от граничното и да притежава и известен запас. Този запас се осигурява с въвеждане на коефициент на сигурност ν, с помощта на който се определя допустимото нормално напрежение $\sigma_{\text{доп}}$.

$$\nu = \frac{\sigma_{\text{гр}}}{\sigma_{\text{доп}}}, \qquad \nu > 1.$$

Ориентировъчни стойности на коефициента на сигурност ν са:

- за жилавопластични материали $\nu = 1{,}5 \div 2$;

- за крехки материали $\nu = 2 \div 5$.

С използване на горния израз се определя максималната изчислена стойност $\sigma_{\max}$ на нормалното напрежение, което трябва да отговаря на якостното условие:

$$\sigma_{\max} \le \sigma_{\text{доп}}, \quad \text{където} \quad \sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_{\text{гр}}}{\nu}.$$

Със стойността на $\sigma_{\max}$ се определя необходимата площ $S_{\max}$ на напречното сечение:

$$S_{\max} = \frac{N}{\sigma_{\max}}.$$

За някои практически задачи се изисква спазване на ограничения на линейните деформации $(\Delta l, \Delta d)$, което се осъществява чрез проверка на изискването за коравина. Изчислената площ $S_{\max}$ се замества в деформационното уравнение и се получава максималното абсолютно удължение Δl_{max}:

$$\Delta l_{max} = \frac{N}{E.S_{max}}.l_0 .$$

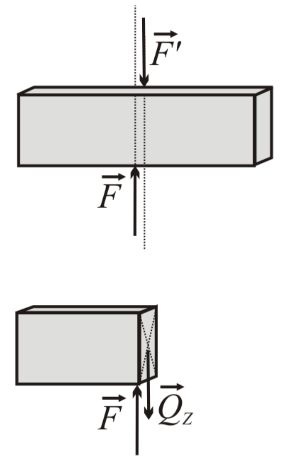
Получената стойност на Δl_{max} трябва да отговаря на деформационното условие:

$$\Delta l_{max} \le \Delta l_{доп} .$$

Допустимите стойности за якостните и деформационните условия са представени в техническите норми.

4. Съпротивление на срязване.

Съпротивление на срязване възниква, когато в напречното сечение на тялото вътрешните сили се редуцират само до тангенциално усилие Q_Z. Това се получава при действието на две много близко разположени противоположни сили $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ с директриси, перпендикулярни на оста на тялото – фиг.2.9. Поради малкото разстояние между силите получения огъващ момент е много малък и огъването се пренебрегва.

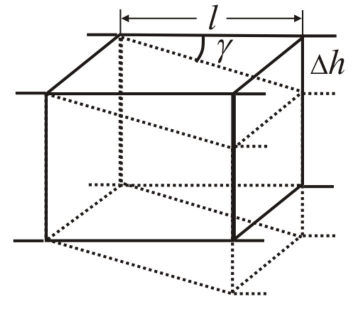


Фиг.2.9.

4.1. Характеристики на деформацията при срязване.

При срязване се наблюдава приплъзване на напречните сечения в натоварения участък едно спрямо друго и пречупване на надлъжните линии в натоварената част спрямо тези в ненатоварената – фиг.2.10. Като характеристики на тези изменения се въвеждат величините:

- абсолютно плъзгане Δh – разстоянието на отместване на сечението при плъзгането;



Фиг.2.10.

- относително плъзгане γ – отношението на абсолютното плъзгане Δh към дължината на участъка l, в който става плъзгането. Отношението е тангенса на ъгъла γ, който се получава при плъзгането на сеченията. За малките ъгли на плъзгане tg $\gamma \approx \gamma$ и за относителното плъзгане се получава:

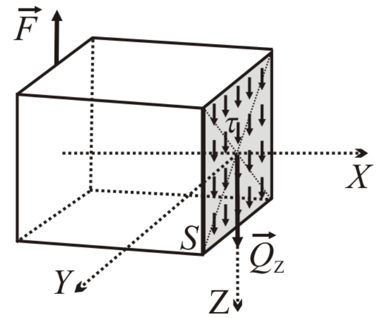
$$\gamma = \frac{\Delta h}{l}.$$

4.2. Напрежение в напречното сечение.

При срязване разрезните сили в сечението са успоредни помежду си, лежат в сечението на тялото и са равномерно разпределени по площта – фиг.2.11. В сечението се получава тангенциално напрежение τ. При тангенциално усилие Q_Z и големина на площта S за тангенциалното напрежение τ при срязване се получава:

$$\tau = \frac{Q_Z}{S}.$$

Между тангенциалното τ и нормалното σ напрежение за стоманите е в сила съотношението $\tau = (0{,}6 \div 0{,}8).\sigma$.



Фиг.2.11.

4.3. Деформационно уравнение.

Деформационното уравнение дава връзката между получената деформация и създаденото напрежение. Това уравнение се получава от закона на Хук за тангенциалното напрежение, съгласно който напрежението е пропорционално на относителното плъзгане:

$$\tau = G.\gamma ,$$

където G е константа, наречена модул на ъгловата деформация и се измерва в Нютон за квадратен метър $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \right]$.

След заместване на τ и γ, се получава деформационното уравнение за абсолютното плъзгане Δh:

$$\Delta h = \frac{Q_Z}{G.S}.l .$$

По тази формула може да се определи абсолютното плъзгане при известна сила, дължина, модул на ъгловата деформация и площта на сечението. Произведението $K = G.S$ се нарича коравина при срязване.

Връзката между модула на линейната и ъгловата деформация чрез коефициента на Поасон μ има вида:

$$E = 2.(1+\mu).G .$$

За повечето метали съотношението между G и E е в границите:

$$G = (0{,}35 \div 0{,}40).E .$$

4.4. Изчислително уравнение.

Изчислителното уравнение дава размерите на разглежданото тяло, за да отговаря на изискванията за якост и коравина.

От якостното условие за тангенциалното напрежение

$$\tau_{cp_{\max}} \leq [\tau]_{cp}$$

се определя необходимата площ $S_{\max}$ на напречното сечение:

$$S_{\max} = \frac{Q_Z}{\tau_{cp_{\max}}}$$

Допустимото напрежение при срязване се избира от справочници или се приема по зависимостта:

за пластични материали $[\tau]_{cp} = 0{,}6.[\sigma]$;

за крехки материали $[\tau]_{cp} = 0{,}8.[\sigma]$.

За проверка на изискването за коравина изчислената площ S_{max} се замества в деформационното уравнение и се получава максималното абсолютно плъзгане Δh_{max}:

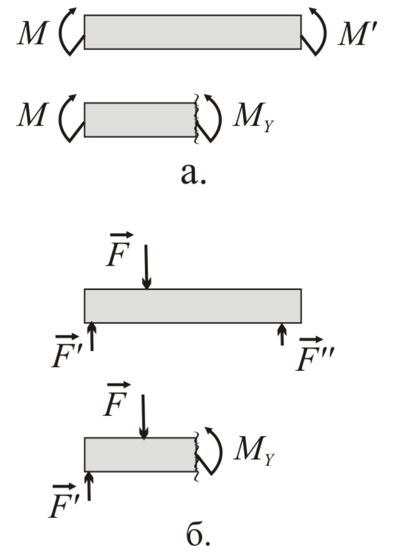
$$\Delta h_{max} = \frac{Q}{G.S_{max}}.l\,,$$

което изпълнява деформационното условие за допустимо плъзгане.

5. Съпротивление на огъване.

Съпротивление на огъване има, когато вътрешните сили се редуцират само до огъващ момент M_y, перпендикулярен на оста на тялото. Такъв момент се получава, когато върху гредата са приложени два момента M и M' по оста OY с равни големини и противоположни посоки, получени от две двоици, лежащи в равнината на натоварване – фиг.2.12.а.

Освен при действието на моменти, съпротивление на огъване има и когато права греда е натоварена със сили $\vec{F}$, $\vec{F}'$, $\vec{F}''$, перпендикулярни на оста на гредата - фиг.2.12.б. Тези сили и оста на гредата трябва да лежат в една равнина, която се нарича равнина на натоварване. В този случай, освен огъващ момент се получава и тангенциално усилие.

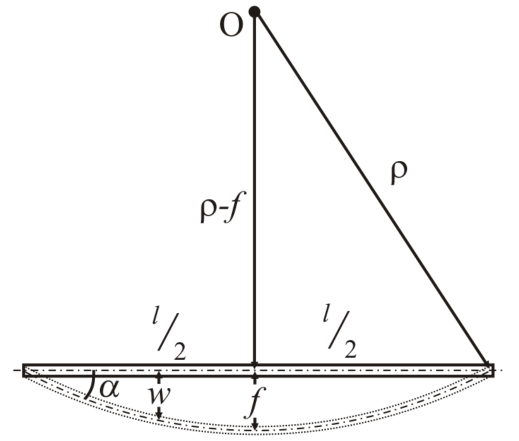


Фиг.2.12.

5.1. Характеристики на деформацията при огъване.

При огъване се наблюдава изкривяване на гредата. Приема се, че при изкривяването на гредата нейната ос от права линия се променя до дъга от окръжност – фиг.2.13. Огънатата ос на гредата се нарича еластична линия.

Като характеристики на огъването се въвеждат следните величини:



Фиг.2.13.

- провисване w – преместването на точки от оста на гредата при огъването в направление, перпендикулярно на оста на гредата. Провисването зависи от мястото му по дължината на гредата: $w = w(x)$;

- максимално провисване f – максималната стойност на провисването $f = w_{max}$. Обикновено то се получава в средата на гредата;

- относително провисване – максималното провисване за единица дължина. Това е отношението на максималното провисване f към дължината l на гредата $\left(\frac{f}{l}\right)$;

- радиус на кривината ρ – радиусът на окръжността, която образува еластичната линия при огъването на гредата. При дължина l на гредата е изпълнено съотношението.

$$\rho^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (\rho - f)^2 .$$

За радиуса на кривината и за провисването от това уравнение се получава съответно:

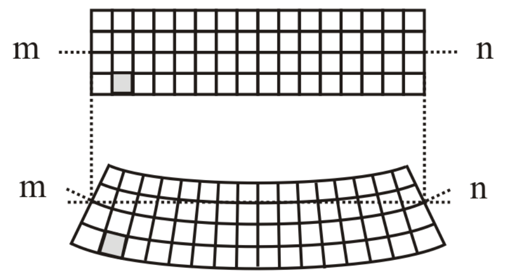
$$\rho = \frac{l^2 + 4.f^2}{8.f} \qquad \text{и} \qquad f = \rho - \frac{\sqrt{4.\rho^2 - l^2}}{2} .$$

- Ъгъл на завъртане на сечението α – ъгълът, който сключва допирателната в точка от гредата в деформирано положение с оста на гредата при недеформирано положение.

5.2. Напрежение в напречното сечение.

При огъването на права греда в сечението възниква нормално напрежение. То се получава поради следните изменения в нейната структура - фиг.2.14., представени съгласно хипотезата на Бернули:

- При деформацията напречните сечения се завъртат като идеално твърди плочки около оси, перпендикулярни на равнината на натоварването. Напречните сечения остават равнинни и перпендикулярни на изкривените нишки.



Фиг.2.14.

- Нишките от изпъкналата страна са опънати и се удължават. Нишките от вдлъбнатата страна са натиснати и се скъсяват.

- Между двата външни слоя има такъв, в който нишките не променят дължината си. Те се наричат нулеви нишки: m - n.

- Нулевите нишки образуват нулев слой, който разделя опънатите от натиснатите нишки. Пресечницата на този слой с равнината на натоварването е еластичната линия, която е равнинна крива. Нулевият слой е перпендикулярен на равнината на симетрия и пресича равнината на всяко напречно сечение в права, която е нулевата линия на сечението и то се завърта около нея при огъването.

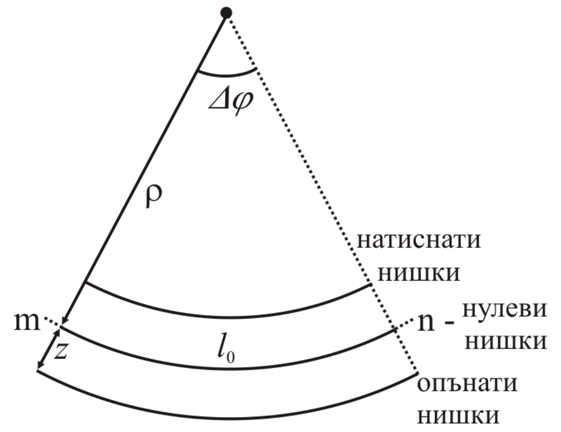
- Всички нишки от един слой, успореден на нулевия, се удължават или скъсяват еднакво.

- При огъването оста на гредата остава в равнината на натоварването и се превръща в равнинна крива.

За определяне на нормалното напрежение в напречното сечение се разглежда деформацията на част от гредата с дължина l_0 на нулевата нишка (m-n) – фиг.2.15. При огъване с радиус ρ тази дължина е:

$$l_0 = \rho.\Delta\varphi ,$$

където $\Delta\varphi$ е ъгъл, съответстващ на дъгата с дължина l_0, получена след огъването.



Фиг.2.15.

Нишка от изпъкналата част на гредата на разстояние z от нулевия слой има увеличена дължина $l = l_0 + \Delta l$, където Δl е удължението. За ъгъл $\Delta\varphi$ увеличената дължина е:

$$l = (\rho + z).\Delta\varphi .$$

Относителното удължение ε на нишката е:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{(\rho + z).\Delta\varphi - \rho.\Delta\varphi}{\rho.\Delta\varphi} = \frac{z}{\rho} .$$

Съгласно законът на Хук за нормалното напрежение σ, то е пропорционално на относителното удължение ε:

$$\sigma = E.\varepsilon = E.\frac{z}{\rho} .$$

От получения израз се вижда, че нормалното напрежение σ зависи от разстоянието z от нишката до нулевия слой – фиг.2.16.а.

Нормалното усилие ΔN - фиг.2.16.б, което се получава за площ ΔS, през която минава опънатата нишка, ще бъде:

$$\Delta N = \sigma.\Delta S = E.\frac{z}{\rho}.\Delta S$$

Нормалното усилие ΔN създава елементарния огъващ момент ΔM_i спрямо оста OY:

$$\Delta M_i = \Delta N_i . z_i = \frac{E}{\rho} . z_i^2 . \Delta S_i$$

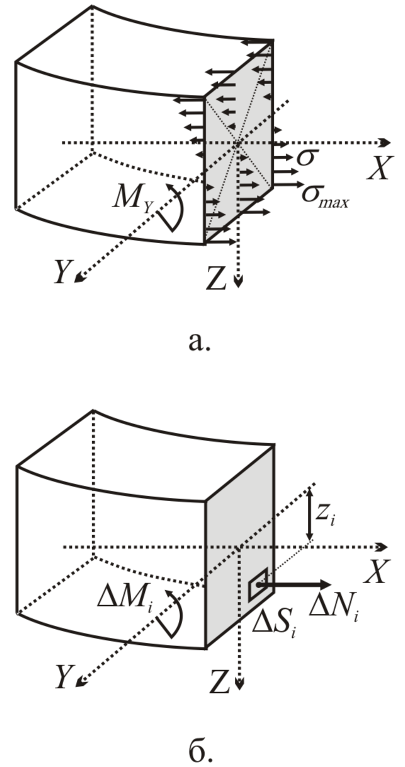
Общият огъващ момент е сума от елементарните огъващи моменти:

$$M_y = \frac{E}{\rho} . \sum_i z_i^2 . \Delta S_i \, .$$

Величината

$$J_y = \sum_i z_i^2 . \Delta S_i$$

се нарича осов инерционен момент на напречното сечение спрямо OY. Размерността за инерционен момент е метър на четвърта степен [m^4].



Фиг.2.16.

С въвеждане на осовия инерционен момент зависимостта за огъващия момент се получава във вида:

$$M_y = \frac{E}{\rho} . J_y \, .$$

Когато елементарната площ $\Delta S \rightarrow 0$, сумата за определяне на инерционния момент преминава в интеграл върху цялата площ S на сечението:

$$J_y = \int_S z^2 . dS \, .$$

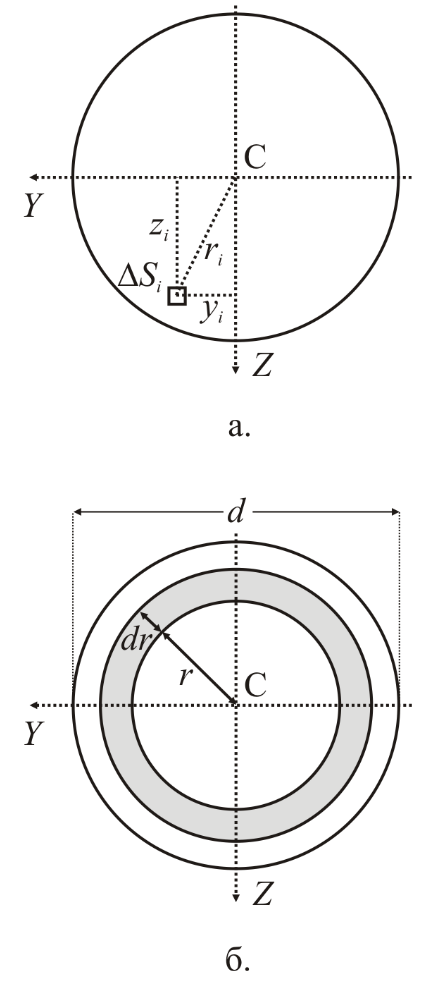
При правоъгълно сечение за елементарна площ dS се приема правоъгълник с основа b и височина dz, която се изменя в граници от $-\,{}^{h}\!/_{2}$ до ${}^{h}\!/_{2}$ – фиг.2.17. Тогава $dS=b.dz$ и за инерционния момент спрямо оста ОУ се получава:

$$J_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b.z^2 dz = \frac{b.z^3}{3}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b.h^3}{12}.$$

Когато напречното сечение е кръг,

$$J_y = \sum_i {z_i}^2.\Delta S_i = \sum_i (r_i^2 - y_i^2).\Delta S_i = J_C - J_z,$$

където $\sum_i {r_i}^2.\Delta S_i = J_C$ е инерционният момент на кръглото сечение спрямо центъра C, а $\sum_i {y_i}^2.\Delta S_i = J_z$ е инерционният момент спрямо оста OZ – фиг.2.18.а. Поради симетрията на сечението спрямо т.C $J_y = J_z$ и тогава $J_y = \frac{J_C}{2}$.



Фиг.2.18.

За кръгло напречно сечение елементарната площ се приема като кръгов пръстен с обиколка $2.\pi.r$ и ширина dr, която се изменя в граници от 0 до $^{d}/_{2}$ – фиг.2.18.б. Тогава $dS = 2.\pi.r.dr$ и за инерционния момент J_C спрямо центъра C се получава:

$$J_C = \int_0^{d/2} \rho^2.2.\pi.r.dr = \frac{\pi.r^4}{2}\Bigg|_0^{d/2} = \frac{\pi.d^4}{32}.$$

Осовият инерционен момент спрямо оста OY ще бъде:

$$J_y = \frac{J_C}{2} = \frac{\pi.d^4}{64}$$

5.3. Деформационно уравнение.

Деформационното уравнение дава връзката между получената деформация и вътрешното усилие. За радиуса на кривината ρ като характеристика на деформацията при огъване се получава:

$$\rho = \frac{E.J_y}{M_y}.$$

От израза за радиуса на кривината се вижда, че при M_y = const и ρ = const. Тогава оста на гредата ще има форма на дъга от окръжност.

5.4. Изчислително уравнение.

Изчислителното уравнение дава необходимите размери на тялото, за да отговаря на изискванията за якост и коравина.

От якостното условие:

$$\sigma_{\max} \le \sigma_{\text{доп}}$$

се определят размерите на напречното сечение, т. е. необходимата площ на напречното сечение.

След заместването на радиуса на кривината в закона на Хук, за нормалното напрежение се получава:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}.z\,.$$

В този израз инерционният момент J_y винаги е положителен. Знакът на нормалното напрежение зависи от знака на огъващия момент и разстоянието на нишката от нулевата линия.

Тази зависимост важи за всички точки на напречното сечение, като z е текуща променлива координата, а отношението $\frac{M_y}{J_y}$ е постоянна величина. Тогава σ е линейна функция на z, при $z = 0$ за точките на нулевата линия $\sigma = 0$. Най-големите опънови и натискови напрежения възникват в най-отдалечените сечения от нулевата линия. Тези сечения се наричат ръбове и напреженията се наричат ръбови напрежения. Обозначават се със $\sigma_{1\max}$ за опънатите нишки при $z = z_1$, и $\sigma_{2\max}$ за натиснатите нишки при $z = z_2$.

За тези сечения максималните нормални напрежения по абсолютна стойност ще бъдат:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_y}{J_y}.z_1 \qquad \text{и} \qquad \sigma_{2\max} = \frac{M_y}{J_y}.z_2 .$$

Отношението:

$$W_{y1} = \frac{J_y}{z_1} \qquad \text{и} \qquad W_{y2} = \frac{J_y}{z_2}$$

се нарича съпротивителен момент на сечението при огъване за опънатите и натиснатите нишки и е с размерност [m^3].

С въвеждането му за нормалното напрежение се получава:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_y}{W_{y1}} \qquad \text{и} \qquad \sigma_{2\max} = \frac{M_y}{W_{y2}} .$$

При симетрично напречно сечение $z = z_1 = z_2$.

Когато допустимите напрежения при опън и натиск за крехки материали са различни, се приемат техните стойности, съответно $\sigma_{1\max} = \sigma_{оп}$ и $\sigma_{2\max} = \sigma_{нат}$.

Със стойността на $\sigma_{\max}$ от дефиниционната формула за нормално напрежение се определя необходимият съпротивителен момент и инерционният момент:

$$W_y = \frac{M_y}{\sigma_{\max}} \qquad \text{и} \qquad J_y = \frac{M_y.z}{\sigma_{\max}} .$$

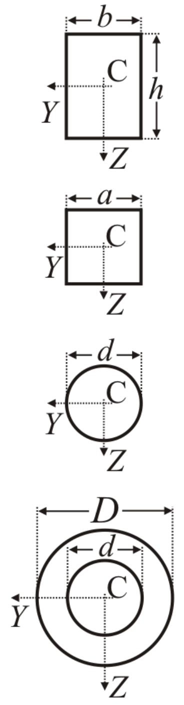
Съпротивителните моменти за греди с напречно сечение, - фиг.2.19, са:

- правоъгълник - $W_y = \frac{b.h^2}{6}$;

- квадрат - $W_y = \frac{a^3}{6}$;

- кръг - $W_y = \frac{\pi.d^3}{32}$;

- кръгов пръстен - $W_y = \frac{\pi.D^3}{32}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$.



Фиг.2.19

Например, диаметърът на кръгло напречно сечение се получава от зависимостта:

$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{32.W_y}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32.M_y}{\pi.\sigma_{\max}}}$$

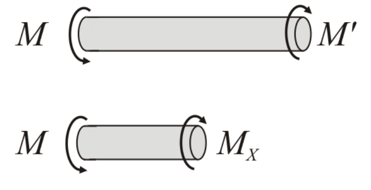
За проверка на изискването за коравина с изчисления диаметър $d_{\max}$ се определя осовият инерционен момент $J_{y\max} = \frac{\pi.d_{\max}{}^4}{32}$, замества се в деформационното уравнение и се получава радиусът на кривината и максималното провисване:

$$\rho_{\max} = \frac{E.J_{y\max}}{M_y} \quad \text{и} \quad f_{\max} = \rho_{\max} - \frac{\sqrt{4.\rho_{\max}{}^2 - l^2}}{2}.$$

Получените стойности трябва да отговарят на поставеното изискване за допустимо огъване.

6. Съпротивление на усукване.

Съпротивление на усукване възниква, когато вътрешните сили се редуцират само до усукващ момент M_x с директриса по оста на тялото. Това се получава, когато в двата края на цилиндрично тяло действат два равни момента с противоположни посоки - фиг.2.20.



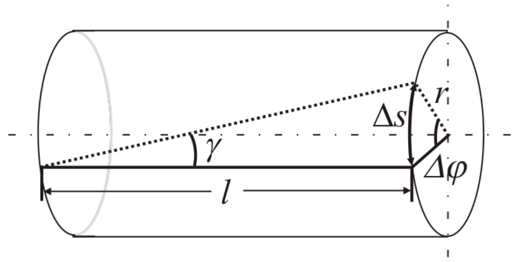
Фиг.2.20.

6.1. Величини, характеризиращи деформацията.

При усукване се наблюдава приплъзване на напречните сечения едно спрямо друго при завъртането им спрямо надлъжната ос на тялото. Като характеристики на тази деформация се въвеждат следните величини:

- абсолютно завъртане $\Delta\varphi$ – ъгълът на завъртане при плъзгането на подвижното сечение, отдалечено на разстояние l от неподвижното - фиг.2.21.,

- относителен ъгъл на усукването θ - абсолютното завъртане за единица дължина. То се получава като отношение на абсолютното завъртане към разстоянието между сеченията:



Фиг.2.21.

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l},$$

- ъгъл на плъзгането γ - ъгъла на отклонение на една крайна нишка спрямо оста на тялото при плъзгането на напречните сечения. Тъй като γ е малък, то $\gamma \approx \text{tg}\,\gamma$, $\text{tg}\gamma = \frac{\Delta s}{l} = \frac{r.\Delta\varphi}{l}$ и тогава:

$$\gamma = r.\theta .$$

6.2. Напрежение в напречното сечение.

В напречното сечение се получава тангенциално напрежение. За приплъзването на напречните сечения едно спрямо друго при завъртането им спрямо надлъжната ос на тялото е в сила законът на Хук за тангенциалното напрежение във вида:

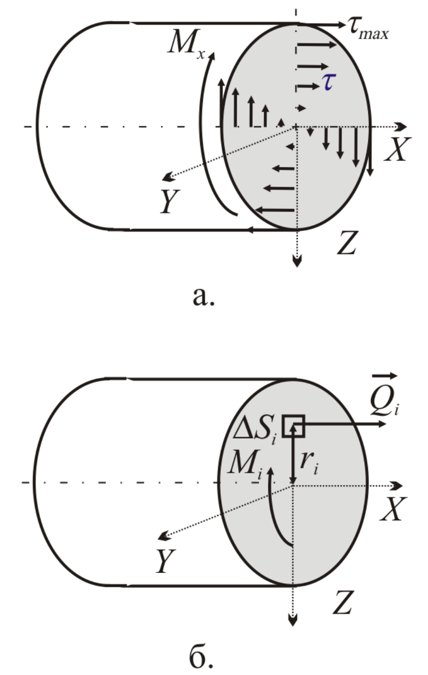
$$\tau = G.\gamma \,.$$

За площ с големина ΔS на разстояние r от оста след заместване на (2.59) в (2.60) за тангенциалното напрежение се получава:

$$\tau = G.r.\theta \,.$$

От този израз се вижда, че тангенциалото напрежение τ расте от 0 при $r = 0$ в центъра, до τ_{max} при $r = {}^{d}/_{2}$ по периферията на сечението – фиг.2.22.а.

Тъй като елементарните вътрешни сили в сечението за случая с чисто усукване се редуцират само до усукващ момент, тангенциалното напрежение τ за произволна площ ΔS винаги е перпендикулярно на радиуса r на тази площ – фиг.2.22.б.



Фиг.2.22.

6.3. Деформационно уравнение.

Деформационното уравнение дава връзката между получената деформация и вътрешното усилие.

Тангенциалната сила Q_i, която се получава за площ ΔS_i е:

$$Q_i = \tau_i.\Delta S_i = G.r_i.\theta.\Delta S_i \,.$$

Усукващият момент M_x на вътрешните сили е сумата от моментите на елементарните тангенциални сили Q_i в напречното сечение:

$$M_x = \sum_i Q_i.r_i \,.$$

След заместване за усукващия момент се получава:

$$M_x = G.\theta.\sum_i r_i^2.\Delta S_i \ .$$

Изразът $\sum_i r_i^2.\Delta S_i = J_x$ се нарича осов инерционен момент на напречното сечение спрямо оста Ox. За кръгово сечение $J_x = J_C$ и се получава $J_x = \dfrac{\pi.d^4}{32}$.

След въвеждане на осовия инерционен момент се получава деформационното уравнение за относителния ъгъл на усукване θ:

$$\theta = \frac{M_x}{G.J_x}.$$

Деформационното уравнение за абсолютното завъртане $\Delta\varphi$ при усукване се получава след заместване на θ:

$$\Delta\varphi = \frac{M_x}{G.J_x}.x\,.$$

6.4. Изчислително уравнение.

Изчислителното уравнение дава необходимите размери на разглежданото тяло, за да отговаря на изискванията за якост и коравина.

За да е изпълнено изискването за якост, за различните материали трябва да бъде изпълнено якостното условие

$$\tau_{\max} \le \tau_{\text{доп}}\,.$$

За получаване на изчислителното уравнение при усукване относителният ъгъл на усукване θ от деформационното уравнение се замества в израза за тангенциалното напрежение τ. За изчислителното уравнение се получава:

$$\tau = r.\frac{M_x}{J_x}.$$

Отношението

$$\frac{J_x}{r} = W_x$$

се нарича съпротивителен момент на сечението спрямо оста Ox. С въвеждане на съпротивителния момент изчислителното уравнение при усукване добива вида:

$$\tau = \frac{M_x}{W_x}.$$

Максимално тангенциално напрежение τ_{max} се получава за най-външния слой на тялото при радиус $r = \frac{d_{\max}}{2}$. Заместването на максималната стойност $\tau_{\max}$ на тангенциалното напрежение при известен усукващ момент M_x дава стойността на съпротивителния момент при усукване $W_{x\max}$:

$$W_{x\max} = \frac{M_x}{\tau_{\max}}.$$

При известен съпротивителен момент се определя максималния диаметър на сечението.

Например, за кръгово сечение, диаметърът се определя от зависимостта:

$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{16.W_{x\max}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16.M_x}{\pi.\tau_{\max}}}.$$

За проверка на изискването за коравина с изчисления диаметър $d_{\max}$ се определя осовият инерционен момент $J_{x\max}$, замества се в деформационното уравнение и се получава максималното абсолютно завъртане $\Delta\varphi_{\max}$ и максималният относителен ъгъл на усукването $\theta_{\max}$:

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{M_x}{G.J_{x\max}}.x \qquad \text{и} \qquad \theta_{\max} = \frac{\Delta\varphi_{\max}}{x}.$$

Получените стойности трябва да отговарят на поставеното изискване за допустимо усукване.

ТРЕТА ГЛАВА

К И Н Е М А Т И К А

1. Кинематика на материална точка.

1.1. Основни понятия.

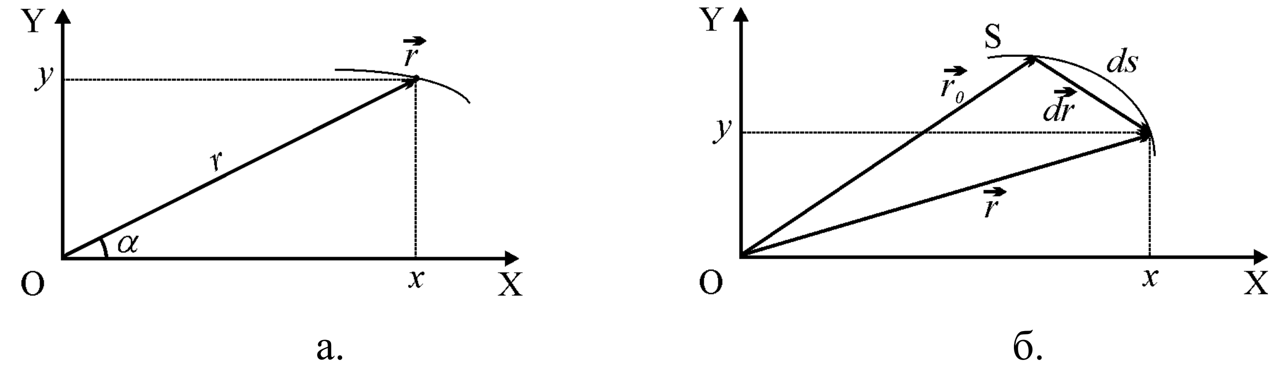
Кинематика - изучава и описва движението на телата и установява връзките между величините, които характеризират движението.

Материална точка - най-простият модел за представяне на дадено тяло, когато размерите на тялото могат да се пренебрегнат в сравнение с разстоянията, за които се извършва движението.

Движение - изменение на положението на материална точка в течение на времето спрямо друго тяло, прието условно за неподвижно.

Положение - определя се с координатите на материалната точка в координатна система, свързана с неподвижното тяло.

В равнинна правоъгълна координатна система с оси ОХ и ОУ положението на материалната точка се определя с радиус-вектора $\vec{r}$ с начало - началото О на координатната система и край - мястото, където се намира материалната точка - фиг.3.1.а. Радиус-векторът



Фиг.3.1.

има големина r и сключва ъгъл α с оста OX на координатната система. Координатите x и y на материалната точка са проекциите на радиус-вектора върху осите на координатната система и се определят по формулите:

$$x = r.\cos\alpha \qquad \text{и} \qquad y = r.\sin\alpha\,.$$

Радиус-векторът $\vec{r}$, представен чрез координатите x и y на материалната точка, се записва по следния начин:

$$\vec{r} = (x\,, y).$$

За измерване на координатите се използва основната единица от системата SI метър [m].

При известни координати x и y големината r и ориентацията на радиус-вектора $\vec{r}$ се определят по формулите:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \text{или} \quad \sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

<u>Отправна система</u> - съвкупността от координатна система, свързана с неподвижното тяло, и часовник за отчитане на времето t.

За измерване на времето се използва основната единица от системата SI секунда [s].

<u>Траектория</u> - линията S, която описва материалната точка при движението си - фиг.3.1.б. Като функционална зависимост тя се дава с връзката между координатите x и y:

$$y = y(x) \qquad \text{или} \qquad x = x(y).$$

<u>Път</u> - дължината ds на част от траекторията, определена за даден интервал от време.

<u>Преместване</u> - разликата $\vec{dr}$ между крайния $\vec{r}$ и началния $\vec{r_0}$ радиус-вектор на точката за даден интервал от време - фиг.3.1.б.:

$$\vec{dr} = \vec{r} - \vec{r_0}.$$

Между дължината *ds* на пътя и големината *dr* на преместването от фиг.3.1.б. е в сила съотношението:

$$ds \geq dr.$$

Равенство между двете величини има, когато траекторията е права линия. При криволинейно движение *ds* се доближава до *dr* при намаляване на разстоянието между двете точки, за които са определени тези величини.

Закон за движение - представя положението на материалната точка като функция на времето.

Когато положението е определено с радиус-вектора, законът за движение в най-общ вид се дава със записа:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Когато положението е определено с координатите x и y, законът за движение се записва поотделно за всяка от осите ОХ и ОУ:

$$x = x(t) \qquad \text{и} \qquad y = y(t).$$

Горните две формули за закона за движение, взети заедно, задават траекторията на движението в параметричен вид чрез параметъра време *t*. Задаването на последователни стойности на времето *t* определя последователни двойки координати (x , y) и последователни радиус-вектори, краищата на които които очертават траекторията.

1.2. Кинематични характеристики на движението.

За намиране на явния вид на закона за движение за конкретен вид движение се въвеждат величините скорост и ускорение.

Скорост - изменението на положението на материалната точка за единица време. Моментната скорост $\vec{v}$ е първата производна на радиус-вектора $\vec{r}$ спрямо времето t:

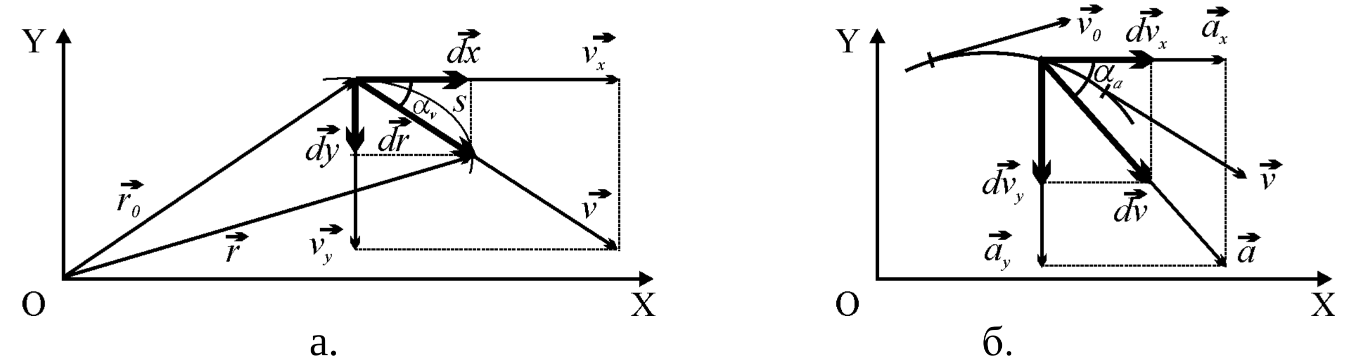
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Моментната скорост е вектор, който има посоката на преместването $d\vec{r}$. Тя е допирателна към траекторията на движението в мястото, където се намира материалната точка - фиг.3.2.а.

Единицата за скорост в системата SI е отношение на единицата за преместване към единицата за време: метър за секунда $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$.

Проекциите на вектора на скоростта v_x и v_y - фиг.3.2.а., са първи производни на съответното преместване x и y на материалната точка по осите на координатната система, спрямо времето t:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad \text{и} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}.$$



Фиг.3.2.

Като проекции v_x и v_y се определят чрез големината v и посоката α_v на вектора на скоростта:

$$v_x = v.\cos\alpha_v \qquad \text{и} \qquad v_y = v.\sin\alpha_v.$$

При известни проекции v_x и v_y големината и посоката на вектора на скоростта се намират по формулите:

$$v=\sqrt{v_x^{\,2}+v_y^{\,2}} \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha_v \frac{v_x}{v} \quad \text{или} \quad \sin\alpha_v=\frac{v_y}{v}.$$

<u>Ускорение</u> - изменението на скоростта на материалната точка за единица време. Моментното ускорение $\vec{a}$ - фиг.3.2.б., е първата производна на вектора на скоростта спрямо времето, или втората производна на радиус-вектора спрямо времето:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Единицата за ускорение в системата SI е отношение на единицата за преместване към квадрата на единицата за време: метър за секунда на квадрат $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$.

Проекциите на вектора на ускорението a_x и a_y са първите производни на съответните проекции на скоростите v_x и v_y на материалната точка по осите на координатната система, спрямо времето t - фиг.3.2.б., или вторите производни на проекциите x и y на радиус-вектора спрямо времето:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{и} \qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Като проекции a_x и a_y се определят чрез големината a и посоката α_a на вектора на ускорението:

$$a_x=a.\cos\alpha_a \qquad \text{и} \qquad a_y=a.\sin\alpha_a.$$

При известни проекции a_x и a_y големината и посоката на вектора на ускорението се намират по формулите:

$$a=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}} \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha_a=\frac{a_x}{a} \quad \text{или} \quad \sin\alpha_a=\frac{a_y}{a}.$$

Познаването на стойностите на кинематичните характеристики на движението дава възможност за определяне на явния вид на закона за движението и на закона за скоростта.

1.3. Праволинейно движение на материална точка.

Праволинейното движение е най-простия вид движение. Представянето на радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ с двете проекции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дава възможност всяко движение в равнината ОХУ да се представи като съвкупност от две праволинейни движения по осите ОХ и ОУ.

Равномерно движение - движение с постоянна скорост.

Ако движението по оста ОХ е равномерно, ускорението $a_x = 0$. Законът за скоростта е:

$$v_x = \text{const}.$$

За да се определи в конкретния случай явният вид на закона за движение, е необходимо познаване на началните условия на движението. Това е началната координата x_0 на материалната точка в началния момент от време $t_0 = 0$, от когато започва отчитане на времето.

Тогава от дефиницията за моментна скорост се получава:

$$dx = v_x.dt\,.$$

Това е едно диференциално уравнение от I ред с разделени променливи, което свързва изменението на координатата dx с изменението на времето dt. Решава се, като се интегрират лявата и дясната страна и се добави интеграционна константа c, която се е загубила при диференциране.

$$\int dx = \int v_x dt + c\,,$$

Общото решение на диференциалното уравнение е:

$$x = v_x.t + c\,,$$

Интеграционната константа c се определя, като в общото решение на диференциалното уравнение се заместят началните условия $x = x_0$ и $t = t_0 = 0$:

$$x_0 = v_x.0 + c \;\rightarrow\; c = x_0 .$$

След заместване на интеграционната константа в общото решение се получава частното решение на диференциалното уравнение:

$$x = x_0 + v_x.t .$$

Полученият израз е закона на движение на материалната точка при равномерно движение по оста X.

Равнопроменливо движение - движение с постоянно ускорение.

Движението по оста OX е равнопроменливо, когато ускорението a_x = const. Началните условия на това движение са начална скорост v_{0x} и начална координата x_0 в началния момент от време $t_0 = 0$, от когато започва отчитане на движението.

Тогава от дефиницията за моментно ускорение за скоростта v_x на материалната точка се получава диференциално уравнение с разделени променливи:

$$dv_x = a_x.dt .$$

За да се реши, диференциалното уравнение се интегрира:

$$\int dv_x = \int a_x.dt + c_1 .$$

Общото решение на диференциалното уравнение е:

$$v_x = a_x.t + c_1 .$$

За намиране на интеграционната константа c_1 в общото решение се замества началното условие за скоростта: $v_x = v_{x0},\; t = t_0 = 0$:

$$v_{x0} = a_x.0 + c_1 \rightarrow c_1 = v_{xo} .$$

След заместването на интеграционната константа c_1 в общото решение се получава законът за скоростта при равнопроменливо движение на материалната точка по оста X.

$$v_x = v_{xo} + a_x.t\,.$$

Като се замести получената формула за скоростта в дефиницията за моментна скорост, се получава:

$$dx = v_{x0}.dt + a_x.t.dt\,.$$

За x и t това е диференциално уравнение с разделени променливи, което се интегрира:

$$\int dx = \int v_{x0}.dt + \int a_x.t.dt + c_2\,.$$

Общото решение е:

$$x = v_{x0}.t + \frac{1}{2}a_x.t^2 + c_2\,.$$

За намиране на интеграционната константа c_2 в общото решение се замества началното условие за координатата: $x = x_0,\ t = t_0 = 0$:

$$x_0 = v_{x0}.0 + \frac{1}{2}a_x.0^2 + c_2 \;\rightarrow\quad c_2 = x_0$$

След заместването на интеграционната константа c_2 в общото решение се получава законът за движението при равнопроменливо движение на материалната точка по оста X.

$$x = x_0 + v_{0x}.t + \frac{1}{2}.a_x.t^2\,.$$

Аналогично се получават законът за скоростта и законът за движението за оста ОУ. При определени проекции на ускорението, скоростта и радиус-векторът на материалната точка, се намират и векторите на съответните величини.

2. Кинематика на материална точка при движение по окръжност.

Движението на материална точка по окръжност е най-простото криволинейно движение. Траекторията е окръжност с радиус R. Произволно криволинейно движение може да се представи като последователни движения по окръжности с променящи се радиуси.

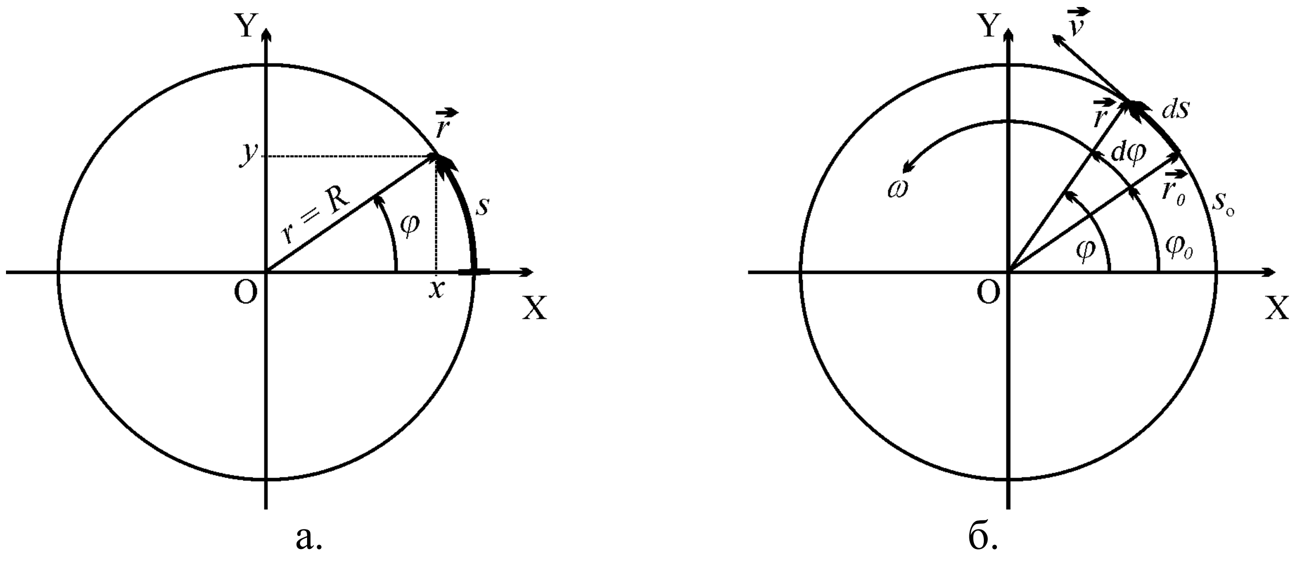
2.1. Начини за описание на движението.

Най-просто описание на движението по окръжност се получава, когато началото на координатната система за определяне на положението на материалната точка е в центъра на окръжността. В този случай уравнението на траекторията е:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

За определяне на положението на материалната точка могат да се използват следните начини - фиг.3.3.а.:

1). Чрез линейните координати x и y. Движението се представя като две праволинейни движения по осите ОХ и ОУ. Законите за движение са функционалните зависимости:



Фиг.3.3.

$$x = x(t) \quad \text{и} \quad y = y(t).$$

Координатите на материалната точка са свързани чрез уравнението на траекторията и изменението им е ограничено до стойности $\pm R$. За описание на движението е достатъчно да се познава законът за движение по едната от координатите.

2). Чрез ъгловата координата φ на радиус-вектора на материалната точка. Големината r на радиус-вектора е постоянна и равна на радиуса R на окръжността: $r = R$. Положението на материалната точка върху окръжността се представя с ъгъла φ, който определя ориентацията на радиус-вектора. Законът за движение е функционалната зависимост на ъгъла на завъртане на радиус-вектора от времето:

$$\varphi = \varphi(t).$$

За измерване на ъгъла се използва допълнителната безразмерна единица от системата SI радиан [rad]. Ъгълът φ в радиани е отношението на дъгата s към радиуса R на окръжността:

$$\varphi = \frac{s}{R}.$$

3). Чрез линейната координата на дъгата s по траекторията. Положението на материалната точка се представя с дължината s на дъга от окръжността. Законът за движение е функционалната зависимост на дължината на дъгата от времето:

$$s = s(t).$$

Между дъгата s от окръжността и ъгъла φ на ориентация на радиус-вектора – фиг.3.3.б., е в сила връзката:

$$s = R.\varphi \quad \text{и} \quad ds = R.d\varphi .$$

При закон за движение, определен с ъгъла на завъртане φ по начина 2), може да се премине към закон на движение, представен с дъгата s по начина 3).

2.2. Кинематични характеристики на движението по окръжност.

За намиране на явния вид на закона за движение по окръжност се въвеждат величините ъглова скорост и ъглово ускорение.

<u>Ъглова скорост</u> - изменението на ъгъла на завъртане за единица време. Моментната ъглова скорост ω - фиг.3.3.б., е първата производна на ъгъла на завъртане φ спрямо времето t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Единицата за ъглова скорост в системата SI е отношение на едини ница за ъгъл към единица за време: радиан за секунда $\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$ или s^{-1}.

При постоянна ъглова скорост $\omega = \omega_{cp} = \mathrm{const}$ движението по окръжност е равномерно. Началните условия на движението са начален ъгъл φ_0 на завъртане в началния момент от време $t_0 = 0$, от когато започва отчитане на движението.

Тогава от дефиницията за моментна ъглова скорост се получава:

$$d\varphi = \omega.dt.$$

Това е диференциално уравнение от I ред с разделени променливи, което свързва изменението на координатата $d\varphi$ с изменението на времето dt. Решава се, като се интегрират лявата и дясната страна и се добави интеграционна константа c, която се е загубила при диференциране:

$$\int d\varphi = \int \omega dt + c.$$

Общото решение на диференциалното уравнение е:

$$\varphi = \omega.t + c\,,$$

Интеграционната константа c се определя, като в общото решение на диференциалното уравнение се заместят началните условия $\varphi = \varphi_0$ и $t = t_0 = 0$:

$$\varphi_0 = \omega.0 + c \;\rightarrow\; c = \varphi_0\,.$$

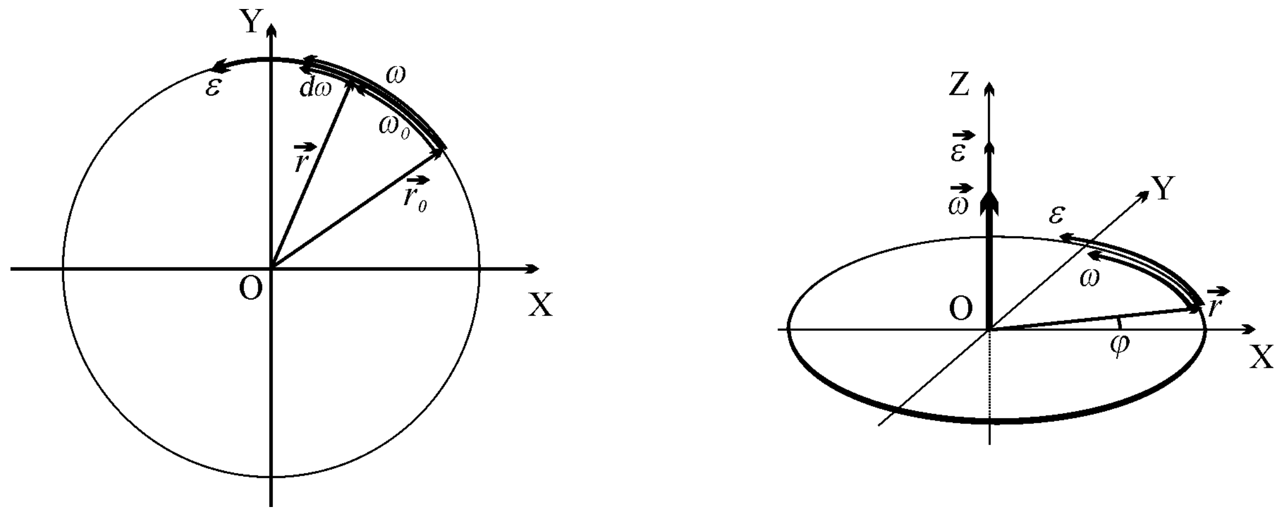
След заместване на интеграционната константа в общото решение се получава частното решение на диференциалното уравнение:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega.t\,.$$

Полученият израз е закона на движение на материалната точка при равномерно движение по окръжност.

<u>Ъглово ускорение</u> - изменението на ъгловата скорост за единица време.

Моментното ъглово ускорение ε - фиг.3.4.а., е първата производна на ъгловата скорост спрямо времето, или втората производна на ъгъла на завъртане спрямо времето:



а. б.

Фиг.3.4.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Единицата за ъглово ускорение в системата SI е отношение на единицата за ъгъл към квадрата на единицата за време: радиан за секунда на квадрат $\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right]$. Тъй като радианът е безразмерна величина, единицата се изразява и като $\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right]$ или s^{-2}.

При постоянно ъглово ускорение ε = const движението по окръжност е равнопроменливо. Началните условия на движението са начална ъглова скорост ω_0 и начална координата φ_0 в началния момент от време $t_0 = 0$, от когато започва отчитане на движението.

От дефиницията за моментно ъглово ускорение за ъгловата скорост ω на материалната точка се получава диференциално уравнение с разделени променливи:

$$d\omega = \varepsilon.dt.$$

За да се реши, диференциалното уравнение се интегрира:

$$\int d\omega = \int \varepsilon.dt + c_1.$$

Общото решение на диференциалното уравнение е:

$$\omega = \varepsilon.t + c_1.$$

За намиране на интеграционната константа c_1 в общото решение се замества началното условие за скоростта: $\omega = \omega_0$, $t = t_0 = 0$:

$$\omega_0 = \varepsilon.0 + c_1 \rightarrow c_1 = \omega_0.$$

След заместването на интеграционната константа c_1 в общото решение се получава законът за скоростта при равнопроменливо движение на материалната точка по окръжност.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon.t.$$

Като се замести получената формула за скоростта в дефиницията за моментна скорост, се получава:

$$d\varphi = \omega_0.dt + \varepsilon.t.dt\,.$$

За φ и t това е диференциално уравнение с разделени променливи, което се интегрира:

$$\int d\varphi = \int \omega_0.dt + \int \varepsilon.t.dt + c_2\,.$$

Общото решение е:

$$\varphi = \omega_0.t + \frac{1}{2}\varepsilon.t^2 + c_2\,.$$

За намиране на интеграционната константа c_2 в общото решение се замества началното условие за координатата: $\varphi = \varphi_0$, $t = t_0 = 0$:

$$\varphi_0 = \omega_0.0 + \frac{1}{2}\varepsilon.0^2 + c_2 \quad \rightarrow \quad c_2 = \varphi_0$$

След заместването на интеграционната константа c_2 в общото решение се получава законът за движението при равнопроменливо движение на материалната точка по окръжност.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0.t + \frac{1}{2}.\varepsilon.t^2\,.$$

Кинематичните величини при движение по окръжност: ъглова скорост и ъглово ускорение, са вектори с направление по оста OZ - фиг.3.4.б. Поради това, че в равнината на движението OXY те не се виждат, се представят с техните посоки на завъртане. Посоките на векторите са такива, че погледнато срещу вектора, завъртането да е обратно на часовниковата стрелка.

2.3. Връзка между линейни и ъглови величини.

Скорост на материална точка при движение по окръжност.

Големината на скоростта на точка при движение по окръжност е:

$$v = \frac{ds}{dt}\,.$$

Ако дъгата се представи с ъгъла на завъртане: $ds = R.d\varphi$ и се замести в дефиницията за ъглова скорост, се получава:

$$v = \frac{R.d\varphi}{dt}, \qquad \text{или} \qquad v = \omega.R.$$

<u>Ускорение на материална точка при движение по окръжност.</u>

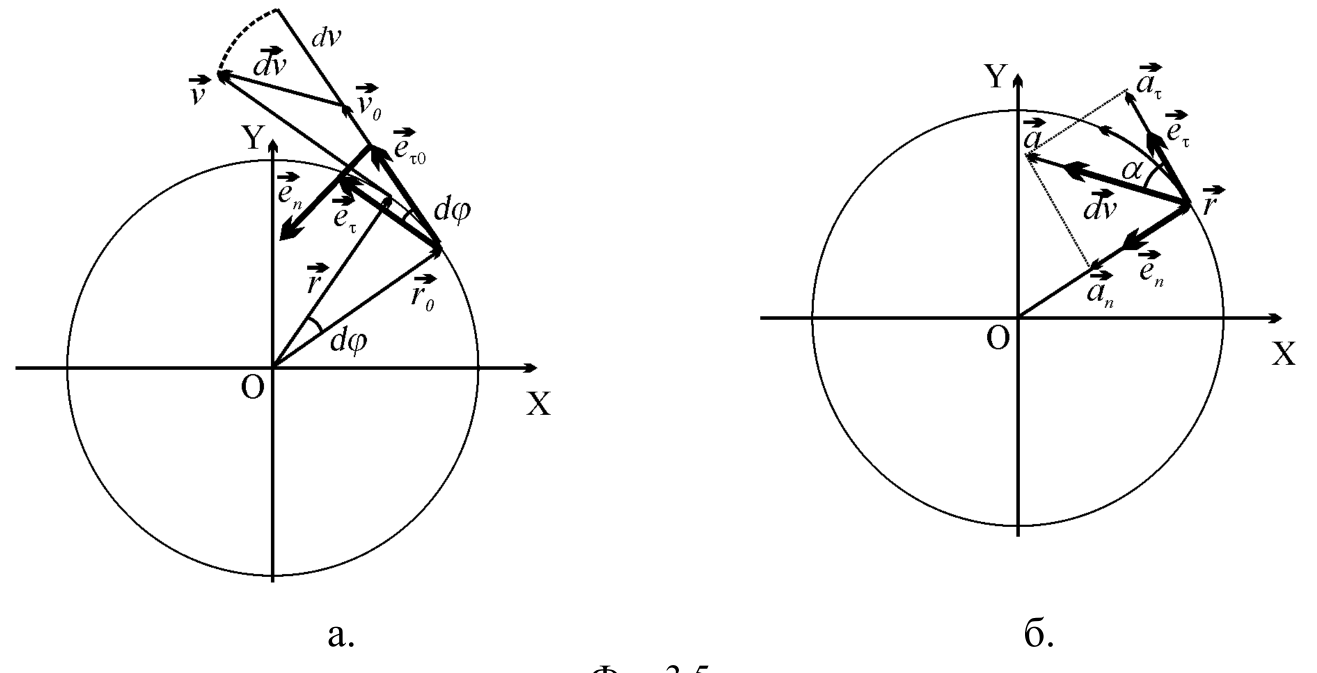
Векторът на скоростта може да се представи като произведение от големината v на скоростта и единичния вектор $\vec{e_\tau}$ на допирателната към окръжността в мястото на точката по посоката на движение:

$$\vec{v} = v.\vec{e_\tau}\,.$$

Ускорението на материалната точка при движение по окръжност се определя, като в дефиницията за ускорението $\vec{a}$ скоростта се представи с горната формула. Тогава изменението на скоростта е $\vec{dv} = dv.\vec{e_\tau} + v.\vec{de_\tau}$ - фиг.3.5.а. За ускорението се получава:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{e_\tau} + v.\frac{\vec{de_\tau}}{dt}\,.$$

В първия член границата $\frac{dv}{dt}$ е големината a_τ на ускорение с нап-



Фиг.3.5.

равление по допирателната $\vec{e}_\tau$ към окръжността. Това ускорение се нарича тангенциално: $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}.\vec{e}_\tau$. Ако големината на изменението на скоростта dv се представи чрез изменението на ъгловата скорост: $dv = R.d\omega$, тангенциалното ускорение може да се изрази чрез ъгловото ускорение ε:

$$\vec{a}_\tau = \varepsilon.R.\vec{e}_\tau .$$

Във втория член на ускорението съставката $\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$ е вектор с посока към центъра на окръжността, която се задава с единичния вектор на нормалата $\vec{e}_n$. Големината на този вектор е ъгловата скорост ω на материалната точка: $\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \omega.\vec{e}_n$. Вторият член в общото ускорение се нарича нормално ускорение:

$$\vec{a}_n = v.\omega.\vec{e}_n .$$

Като се вземе предвид връзката между линейната и ъгловата скорост, нормалното ускорение може да се представи по два начина:

$$\vec{a}_n = \omega^2.R.\vec{e}_n \qquad \text{или} \qquad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}.\vec{e}_n .$$

Разположението на пълното ускорение $\vec{a}$ и неговите проекции тангенциално $\vec{a}_\tau$ и нормално $\vec{a}_n$ ускорение са показани на фиг.3.5.б. Големината на пълното ускорение е:

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} .$$

Ориентацията на пълното ускорение на материалната точка се определя с ъгъла α между него и допирателната към окръжността в мястото на точката:

$$\cos\alpha = \frac{a_\tau}{a} \qquad \text{или} \qquad \sin\alpha = \frac{a_n}{a} .$$

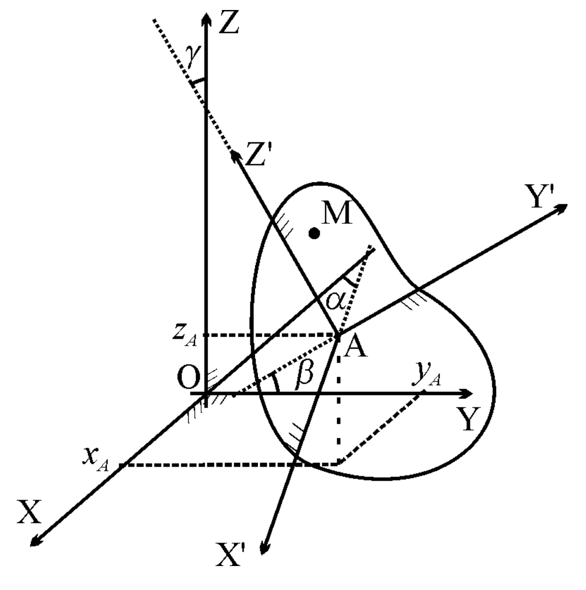
3. Кинематика на твърдо тяло.

3.1. Основни понятия и начин за описание на движението.

Идеално твърдо тяло - модел за представяне на тялото като система от материални точки, разстоянията между които не се променят с течение на времето.

За да е известно движението на идеално твърдо тяло, е необходимо да се опише движението и да се познават кинематичните характеристики на всяка произволна точка M от тялото. Положението на идеално твърдо тяло в предварително избрана координатна система OXYZ се определя с положението на произволно избрана точка A от тялото, наречена полюс, и ориентацията на тялото спрямо координатната система. За определяне на ориентацията на тялото с него се свързва подвижна координатна система AX'Y'Z', началото на която е в полюса A – фиг.3.6.

Положението на тялото се задава с координатите x_A, y_A и z_A на точка A и ъглите между осите на неподвижната и подвижната координатна система: ъгъла α между OX и AX', ъгъла β между OY и AY' и ъгъла γ между OZ и AZ'. При движението на тялото тези величини се изменят с течение на времето.



Фиг.3.6.

В най-общия случай законите за движение на тяло са зависимостите на x_A, y_A, z_A, α, β и γ от времето t:

$$x_A = x_A(t),\ \ y_A = y_A(t),\ \ z_A = z_A(t),\ \ \alpha = \alpha(t),\quad \beta = \beta(t),\quad \gamma = \gamma(t).$$

Ако $\vec{r_A}$ е радиус-вектора на т.A в OXYZ , то за определено положение на тялото радиус-вектора на т.M в OXYZ $\vec{r_M}$ е:

$$\vec{r_M} = \vec{r_A} + \vec{AM}$$

3.2. Прости движения на твърдо тяло.

3.2.1. Транслационно движение.

Транслационно е движението, при което две неуспоредни прави от тялото остават успоредни на себе си. Транслационното движение е частен случай на общото движение при условия: α = const, β = const и γ = const – фиг.3.7.

Транслационното движение има две важни свойства:

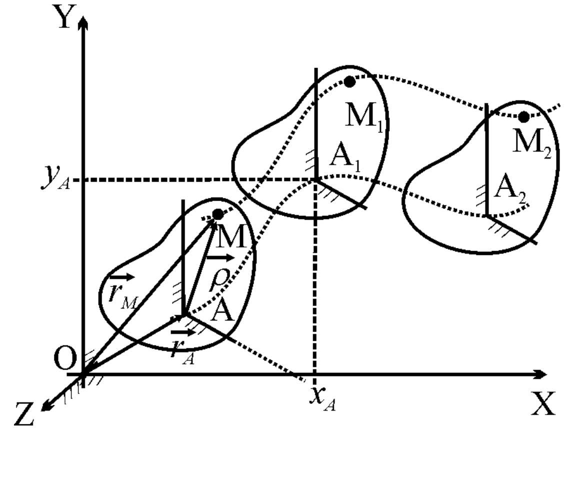
- Траекториите на точките от тялото са еднакви криви.

Когато движението на полюса т.A е известно, положението на точката се определя с радиус-вектора $\vec{r_A} = \vec{r_A}(t)$.

Положението на произволна т.M от тялото е определено спрямо т.A с вектора $\vec{\rho} = \vec{AM}$. При транслационното движение за последователните положения AM || A_1M_1 || A_2M_2. Тъй като тялото е идеално твърдо, то AM = A_1M_1 = A_2M_2. Тогава траекторията на т.M се получава от успоредното преместване на траекторията на т.A, т.е. двете траектории са еднакви криви.

- Скоростите и ускоренията на всички точки от тялото са еднакви.

Скоростта на произволна т.M, представена чрез скоростта на полюса т.A е:



Фиг.3.7.

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Но $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$, $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$ (ρ = const). Тогава $\vec{v}_M = \vec{v}_A$.

Ускорението на т.М е:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A.$$

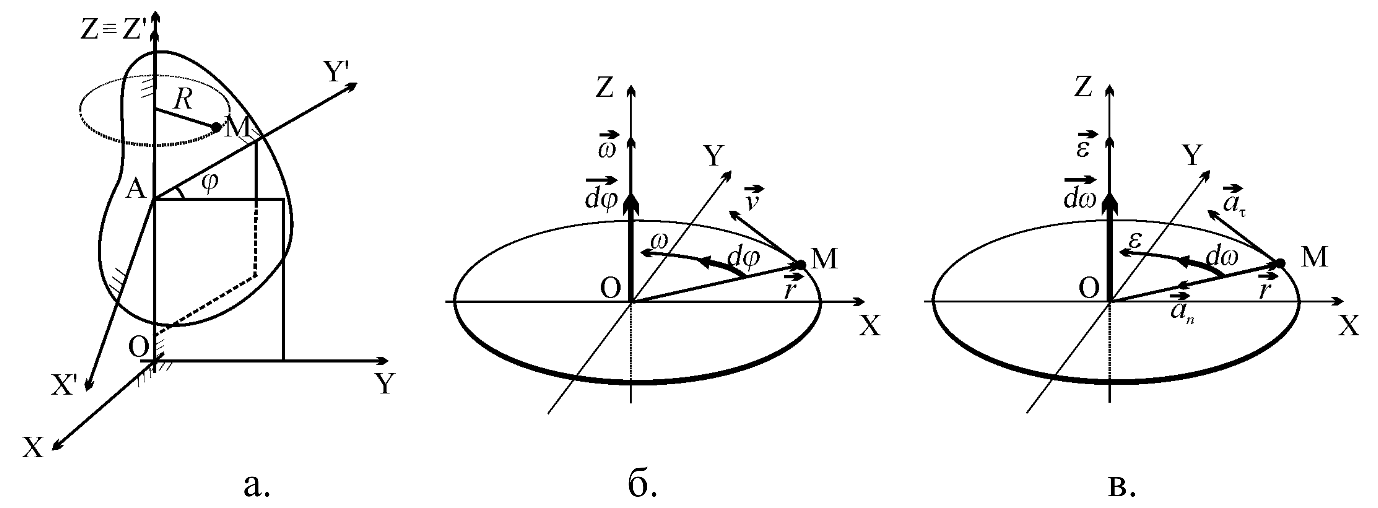
В този случай движението на тялото се описва с движението на коя да е негова точка. Законите за движение са:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t) \qquad \text{или} \qquad x_A = x_A(t), \qquad y_A = y_A(t).$$

3.2.2. Ротационно движение около неподвижна ос.

Ротационното движение е движение, при което тялото има ос на въртене, определена от две неподвижни точки O и O' – фиг.3.8.а. Неподвижната координатна система се ориентира така, че Z ≡ Z'. Траекторията на произволна точка М от тялото е окръжност с радиус R.

Ротационното движение е частен случай на равнинното движение, когато е изпълнено условието Z ≡ Z', x_A = const и y_A = const. Законът за движението на тялото се определя с ъгъла на завъртане:



Фиг.3.8.

$$\varphi = \varphi(t).$$

При ротационното движение на тяло около неподвижна ос траекториите на точките от тялото са концентрични окръжности и всички точки имат едни и същи ъглови скорости и ъглови ускорения.

За въвеждане на ъгловата скорост и ъгловото ускорение като вектори, съответно $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, се приема, че елементарния ъгъл на завъртане $\vec{d\varphi}$ е вектор. Той е по оста на въртене OZ и посоката му е такава, че погледнато срещу нея, завъртането на точката по окръжността да е обратно на часовниковете стрелка – фиг.3.8.б. Тогава векторите на ъгловата скорост и ъгловото ускорение също са по оста OZ и ще бъдат съответно:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{d\varphi}}{dt} \qquad \text{и} \qquad \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{d\omega}}{dt}.$$

Линейните скорости и ускорения на точките зависят от разстоянието им до оста на въртене. Векторът скорост е векторното произведение на вектора на ъгловата скорост и радиус-вектора на т.М:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ .$$

Скоростта е перпендикулярна на ъгловата скорост и на радиус-вектора, т.е. скоростта е върху допирателната към окръжността в т.М. Посоката на скоростта е такава, че погледнато срещу нея, ъгловата скорост да се завърта към радиус-вектора по най-късия път в посока, обратна на часовника.

За ускорението на т.М се получава:

$$\vec{a} = \frac{\vec{dv}}{dt} = \frac{\vec{d\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\vec{dr}}{dt}, \quad \text{където} \quad \frac{\vec{d\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{v}\ .$$

Тогава:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Ускорението на т. М има две съставки: тангенциално ускорение $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ и нормално ускорение $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Тангенциалното ускорение $\vec{a}_\tau$ е перпендикулярно на ъгловото ускорение и на радиус-вектора, т.е. тангенциалното ускорение е върху допирателната към окръжността в т.М – фиг.3.8.в. Посоката на тангенциалното ускорение е такава, че погледнато срещу нея, ъгловото ускорение да се завърта към радиус-вектора по най-късия път в посока, обратна на часовниковата стрелка.

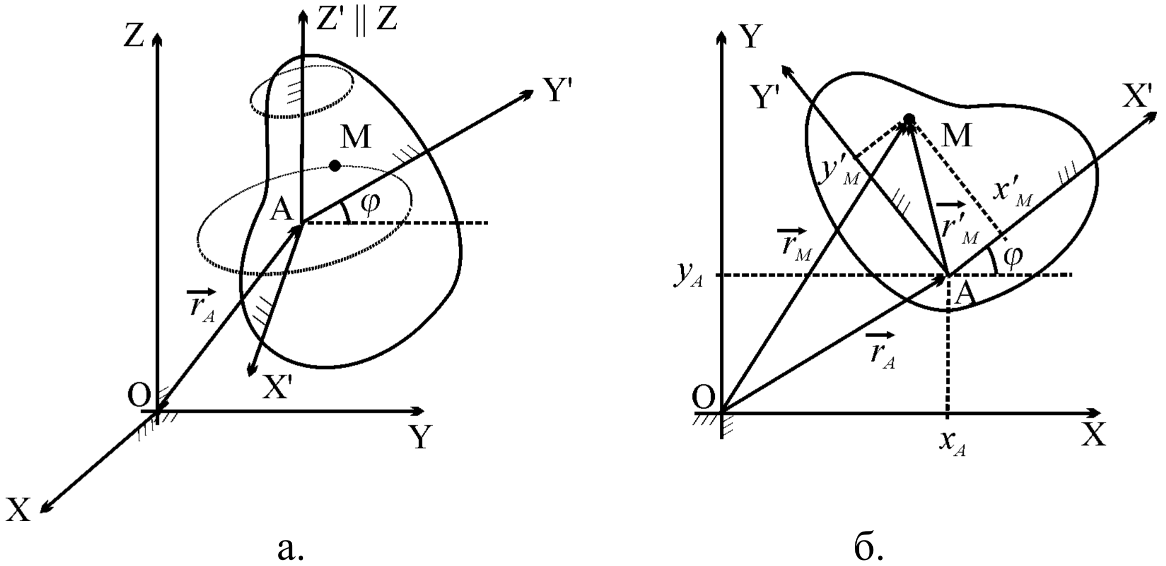
Нормалното ускорение $\vec{a}_n$ е перпендикулярно на ъгловата скорост и на скоростта, т.е. нормалното ускорение е върху радиуса на окръжността към т.М. Посоката на нормалното ускорение е такава, че погледнато срещу нея, ъгловата ускорение да се завърта към скоростта по най-късия път в посока, обратна на часовника.

3.3. Равнинно движение на твърдо тяло.

<u>Равнинно движение</u> - всички точки от тялото се движат в равнини, успоредни на дадена неподвижна равнина.

<u>3.3.1. Закон за движение на тялото.</u>

Равнинното движение е частен случай на най-общото движение, когато е изпълнено условието OZ || AZ' – фиг.3.9.а. Движението на тялото се представя чрез движението на едно сечение на тялото, успоредно на равнината OXY. Тогава няма движение по оста OZ и остава движението на полюса т.А спрямо осите OX и OY и завъртането на равнинното сечение на ъгъл φ. Равнинното движение се наблюдава, погледнато срещу оста OZ - фиг.3.9.б. В този случай законите на движението на едно равнинно сечение на тялото във векторен вид се определят с функциите:



Фиг.3.9.

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t) \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi\,(t).$$

Ако радиус-векторът $\vec{r}_A = (x_A, y_A)$ на т.А се представи с проекции, законът на движение на тялото се дава с три скаларни функции на времето:

$$x_A = x_A(t),\;\; y_A = y_A(t),\;\; \varphi = \varphi\,(t).$$

3.3.2. Закон за движение на точка от тялото.

Положението на произволна т.М от равнинното сечение на тялото се задава с нейния радиус-вектор $\vec{r'}_M$ в подвижната координатна система АХ’Y’, който се мени с течение на времето само по посока. Положението на т.М спрямо неподвижната координатна система ОХУ се определя от радиус-вектора $\vec{r}_M$, за който се получава:

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r'}_M(t).$$

В този израз радиус-векторите са представени като функции на времето и това е векторния вид на законът на движение на т.М в неподвижната координатно система OXY.

След проектиране на векторния вид на закона на движение на т.М върху осите на неподвижната координатна система законът на движение се получава в скаларен вид:

$$\begin{aligned} x_M(t) &= x_A(t) + x'_M.\cos\varphi(t) - y'_M.\sin\varphi(t) \\ y_M(t) &= y_A(t) + x'_M.\sin\varphi(t) + y'_M.\cos\varphi(t) \end{aligned}.$$

3.3.3. Закон за разпределение на скоростите на точки от тялото.

Скоростта на т.М в неподвижната координатна система OXY се получава след диференциране на закона на движение спрямо времето:

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_A(t)}{dt} + \frac{d\vec{r'}_M(t)}{dt}.$$

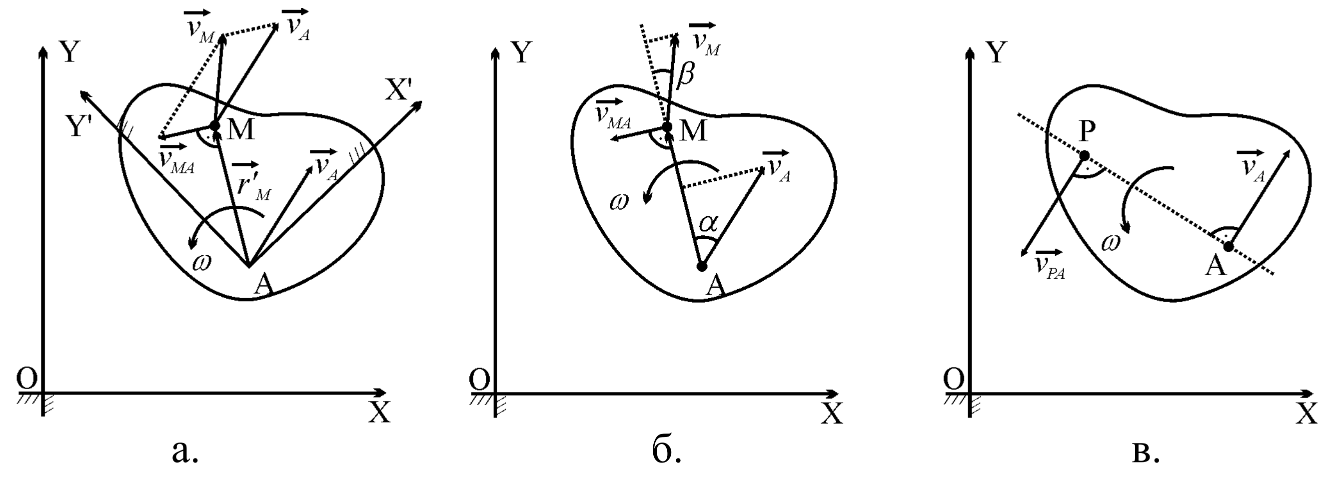
В получения израз $\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A(t)}{dt}$ е скоростта на т.А, $\vec{v}_{MA} = \frac{d\vec{r'}_M(t)}{dt}$ е скоростта на т.М спрямо т.А в подвижната координатна система при завъртането на т.М по окръжност спрямо т.А, като $\vec{v}_{MA} \perp \vec{r'}_M$ и $\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r'}_M$ - фиг.3.10.а. При тези означения законът за разпределение на скоростите на точки от тялото получава вида:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r'}_M .$$

Теорема за проектираните скорости – проекциите на скоростите на две точки от тялото върху правата линия, която ти свързва, са равни – фиг.3.10.б.

Теоремата следва от закона за разпределение на скоростите. Тъй като $v_{MA}.\cos 90 = 0$, при проектиране върху правата AM се получава:

$$v_A.\cos\alpha = v_M.\cos\beta .$$



Фиг.3.10.

Моментен център на скоростите – точка от подвижното сечение на тялото, която за момента има нулева скорост при ненулева ъглова скорост на сечението.

Съществуването на моментен център на скоростите следва от закона за разпределение на скоростите. Ако е известна скоростта $\vec{v}_A$ на т.А от равнинното сечение и ъгловата скорост ω, равнинното сечение и т.А ще се завъртат около център неподвижна т.Р, която ще лежи на перпендикуляра АР към скоростта $\vec{v}_A$ - фиг.3.10.в.

Законът за разпределение на скоростите за т.А и т.Р ще има вида:

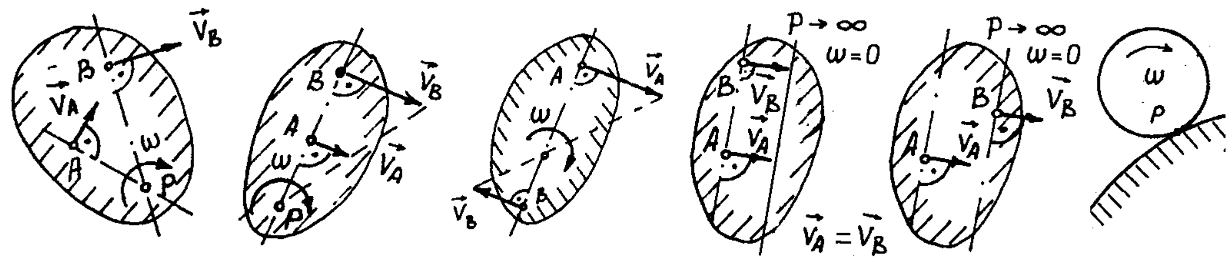
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP}.$$

При $\vec{v}_P = 0$ с отчитане на посоките на $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{PA}$, се получава $v_A - \omega.AP = 0$. За нулева скорост на т.Р, разстоянието АР трябва да е:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Моментния център на скоростите т.Р е на дадено място само в момента време е с определени $\vec{v}_A$ и ω. При промяната им с течение на времето моментния център на скоростите променя положението си.

На фиг.3.11. са дадени другите възможни начини за намиране на моментния център на скоростите.



Фиг.3.11.

3.3.4. Закон за разпределение на ускоренията на точки от тялото.

Ускорението на т.М в неподвижната координатна система ОХУ се получава след диференциране на закона на разпределение на скоростите спрямо времето:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}_A(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}_{MA}(t)}{dt}.$$

В изразът $\vec{a}_A = \dfrac{d\vec{v}_A(t)}{dt}$ е ускорението на т.А, $\vec{a}_{MA} = \dfrac{d\vec{v}_{MA}(t)}{dt}$ е ускорението на т.М спрямо т.А в подвижната координатна система при завъртането на т.М по окръжност около т.А. При тези означения законът за разпределение на ускоренията на точки от тялото получава вида:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}.$$

Ускорението на т.М спрямо т.А в подвижната координатна система $\vec{a}_{MA}$ се развива подробно:

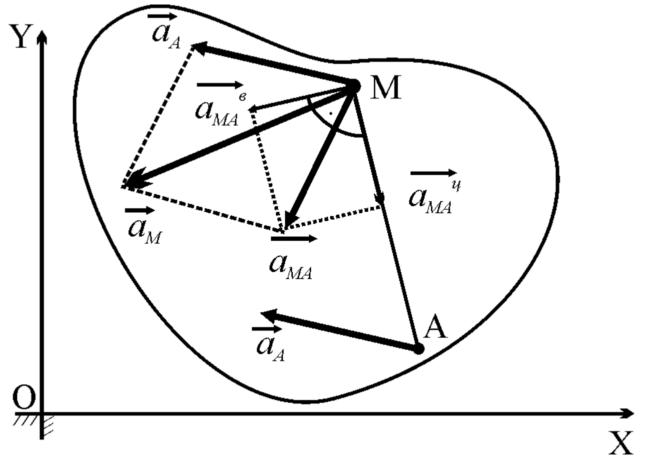
$$\vec{a}_{MA} = \frac{d\vec{v}_{MA}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r'}_M\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'}_M + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r'}_M}{dt}.$$

В този израз $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ е ъгловото ускорение при завъртане на равнинното сечение на тялото, $\vec{a}_{MA}{}^{в} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r'}_M$ се нарича въртеливо ускорение, което за разлика от тангенциалното, е при завъртане на т. М около подвижната т.А. Във втория член $\vec{v}_{MA} = \dfrac{d\vec{r}'_M(t)}{dt}$ е скоростта на т. М спрямо т.А в подвижната координатна система, $\vec{a}_{MA}^{ц} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{MA}$ се нарича центростремително ускорение, което, за разлика от нормалното, е при завъртане на т.М около подвижната т.А.

С въвеждане на въртеливото и центростремителното ускорение законът за разпределение на ускоренията зат.М получава вида:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{в} + \vec{a}_{MA}^{ц}.$$

На фиг.3.12. е показано разположението на векторите, влизащи в закона за разпределение на ускоренията.



Фиг.3.12.

ЧЕТВЪРТА ГЛАВА

Д И Н А М И К А

1. Динамика на материална точка.

1.1. Основни понятия.

Динамика - изучава движението на телата като следствие от причините, които го пораждат: действащите върху тялото сили.

Материална точка в динамиката – тяло, на което за разглеждания случай на движение формата и размерите могат да се пренебрегнат и притежава свойството инертност.

Инертност – свойството на материалната точка да запазва състоянието си на покой или на равномерно праволинейно движение.

Маса - мярка за инертността на материална точка. За измерване на маса се използва основната единица от системата SI килограм [kg].

Сила - векторна величина, която е мярка за взаимодействието между телата. Взаимодействието може да се осъществи при допир на телата: пряко взаимодействие; или без да има допир, от разстояние: чрез силово поле.

1.2. Принципи на динамиката.

Динамиката се основава на няколко основни принципа. Те са формулирани окончателно от Нютон и се наричат още закони на Нютон.

Първи закон - принцип на инерцията:

Една материална точка запазва състоянието си на покой или на равномерно праволинейно движение, ако не си взаимодейства с други тела.

Втори закон - основно уравнение на динамиката:

Ускорението $\vec{a}$, което получава материалната точка, е пропорционално на приложената сила $\vec{F}$ върху точката: $\vec{a} \sim \vec{F}$. Връзката между силата и ускорението е масата m на материалната точка.

Вторият закон на Нютон във векторна форма се записва във вида:

$$\vec{F} = m.\vec{a}.$$

Единицата за сила в системата SI е производна единица, произведение на единицата за маса и единицата за ускорение: килограм по метър за секунда на квадрат: $\left[\mathrm{kg}.\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$ и е наречена Нютон [N].

Трети закон – принцип за дейстието и противодействието:

На силата на действие $\vec{F}_{1\to2}$ на една материална точка върху друга, се поражда еднаква по големина и обратна по посока сила на противодействие $\vec{F}_{2\to1}$ на втората точка срещу първата: $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$.

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}.$$

Принцип на суперпозицията:

Под едновременното действие на силите $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$, материалната точка ще извърши същото движение, както под действието на една сила $\vec{F}$, наречена равнодействаща, равна на геометричната сума от приложените върху точката сили.

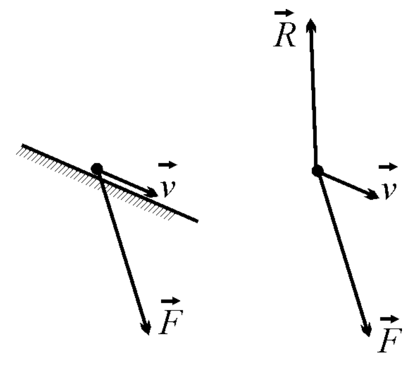
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n.$$

След разделяне на масата m на материалната точка, и като се има предвид, че $\vec{a} = \vec{F}/m$, $\vec{a}_1 = \vec{F}_1/m$, $\vec{a}_2 = \vec{F}_2/m$ и т.н., се получава:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n.$$

Ако върху една материална точка действат едновременно няколко сили, полученото ускорение е равно на векторната сума на ускоренията на всяка една от силите.

<u>Принцип на освобождаването</u> – състоянието на една несвободна точка не се променя, ако се заменят връзките със съответните им реакции – фиг.4.1.



Фиг.4.1.

<u>Принцип на Даламбер</u> – на основното уравнение на динамиката $\vec{F} = m.\vec{a}$, чрез въвеждането на Даламберовата инерционна сила $\vec{\Phi} = -m.\vec{a}$, може да се даде вид на уравнение на статиката: $\vec{F} + \vec{\Phi} = 0$.

2. Диференциални уравнения на движението.

В основното уравнение на динамиката ускорението $\vec{a}$ е първа производна на скоростта $\vec{v}$ и втора производна на радиус-вектора $\vec{r}$ спрямо времето *t*: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Представено така в основното уравнение на динамиката, ускорението $\vec{a}$ му дава вид на диференциално уравнение от втори ред:

$$m.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\,.$$

По отношение на скоростта $\vec{v}$ на материалната точка диференциалното уравнение на движението ще бъде от първи ред и има вида:

$$m.\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,.$$

За краткост в динамиката производните на величините спрямо времето се означават с точка над символа на величината за всеки ред на производната. Означението на ускорението като първа производна на скоростта е $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$, като втора производна на радиус-вектора е $\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}}$ или $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}$. Означението на скоростта като първа производна на радиус-вектора спрямо времето е $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$.

Чрез тези означения основното уравнение на динамиката, записано като диференциално уравнение на движението, ще има вида:

$$m.\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \qquad \text{или} \qquad m.\dot{\vec{v}} = \vec{F}.$$

2.1. Диференциални уравнения на движението за свободна материална точка.

Свободна материална точка - за която няма наложени ограничения върху движението и.

Материалната точка се движи под действието на няколко сили, които са представени чрез тяхната равнодействаща:

$$m.\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}.$$

За решаване на диференциалното уравнение на движението във векторен вид е необходимо проектирането му върху осите на подходящо избрана координатна система. В декартова координатна система OXYZ след проектиране върху осите X, Y и Z се получават три скаларни диференциални уравнения на движението от втори ред:

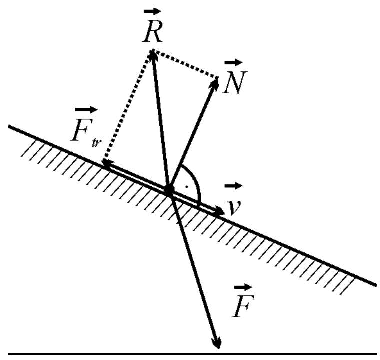
$$m.\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}, \qquad m.\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} \qquad \text{и} \qquad m.\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}.$$

2.2. Диференциални уравнения на движението за несвободна материална точка.

Несвободна материална точка - за която има наложени ограничения върху движението и.

Тогава в диференциалното уравнение на движението трябва да се добавят и силите на реакциите на връзките. Тези сили са неизвестни, но могат да се определят от съществуващи условия за равновесие или други допълнителни уравнения, които ги въвеждат.

При наличие на връзка, наложена от грапава повърхнина, силата на общата реакция $\vec{R}$ се представя с две проекции: перпендикулярна $\vec{N}$ към допирателната към повърхността, която е нормалната реакция, и допирателна $\vec{F}_{tr}$ към повърхността, която е силата на триене – фиг.4.2.



Фиг.4.2.

Като нормална реакция $\vec{N}$ се определя от условие за равновесие, записано перпендикулярно на повърхността, а силата на триене при движение е с големина $F_{tr} = \mu.N$ и е насочена обратно на вектора на скоростта на материалната точка. Диференциалното уравнение във векторен вид е:

$$m.\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{F}_{tr} .$$

Диференциалните уравнения по оси на координатната система са:

$$m.\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} + N_x + F_{trx}, \quad m.\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} + N_y + F_{try} \quad \text{и} \quad m.\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} + N_z + F_{trz} .$$

2.3. Видове задачи на динамиката.

Права задача: Известни са масата m и законът за движение $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на материалната точка. Търси се равнодействащата $\vec{F}$ или някоя друга неизвестна сила.

За решаване на задачата се законът за движение диференцира два пъти и се получава ускорението на материалната точка. Произведението на ускорението по масата дава равнодействащата на силите.

<u>Обратна задача:</u> Известни са масата m, равнодействащата сила $\vec{F}$ на материалната точка и началните условия на движението: начална скорост $\vec{v}_0$ и начално положение $\vec{r}_0$ в началния момент от време $t_0 = 0$. Търси се са законът за движение $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и кинематичните характеристики на движението.

За решаване на задачата се интегрира диференциалното уравнение на движението за скоростта, от което като първи интеграл се получава законът за скоростта на материалната точка.

Законът за скоростта се записва като диференциално уравнение за положението и времето и решаването му дава законът за движение на материалната точка.

2.4. Основни случаи при обратната задача на динамиката.

Основните случаи при решаване на обратната задача на динамиката се определят от вида на действащите сили върху материалната точка. Равнодействащата сила може да е постоянна - $\vec{F} = const$, да зависи от времето - $\vec{F} = \vec{F}(t)$, от скоростта - $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$, от положението - $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, както и от няколко от тези величини.

<u>Сила на тежестта</u> $\vec{G}$: В граници близо до земната повърхност се приема за постоянна. Поражда се от гравитационното силово поле на Земята. Елементите на вектора на силата на тежестта са: приложна точка - действа върху разглежданата материална точка; директриса - вертикална линия, минаваща през материалната точка; посока - към центъра на Земята; големина - произведението на масата m по земно-

то ускорение $\vec{g}$:

$$\vec{G} = m.\vec{g}\,.$$

Под действието само на постоянна сила на тежестта $\vec{G}$, движението на материална точка с маса m е по вертикална линия в посока надолу. Положението на материалната точка се отчита по ос OZ с начало земната повърхност и насочена нагоре – фиг.4.3. Началните условия на движението са: $z = h$ и $v = 0$ при $t = 0$. Търси се законът на скоростта и за движението на точката.

Диференциалното уравнение на движението за текущо положение на материалната точка е:

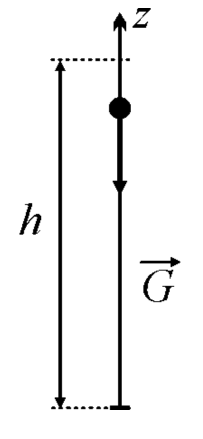
$$m.\ddot{z} = -G\,.$$

Представя се като диференциално уравнение от първи ред за скоростта v и се разделят променливите:

$$m.\frac{dv}{dt} = -m.g \qquad \rightarrow \qquad dv = -g.dt\,.$$

Диференциалното уравнение се интегрира в граници съответно от 0 до v и от 0 до t:

$$\int_0^v dv = -g.\int_0^t dt \qquad \rightarrow \qquad v\Big|_0^v = -g.t\Big|_0^t\,.$$



Фиг.4.3.

Частното решение на това диференциално уравнение е законът за скоростта на движение на точката:

$$v = -g.t\,.$$

Този закон се представя като диференциално уравнение от първи ред за координатата z и се разделят променливите:

$$v = \frac{dz}{dt} = -g.t \qquad \rightarrow \qquad dz = -g.t.dt\,.$$

Диференциалното уравнение се интегрира в граници съответно от h до z и от 0 до t:

$$\int_h^z dz = -g.\int_0^t t.dt \qquad \rightarrow \qquad z\Big|_h^z = -\frac{1}{2}.g.t^2\Big|_0^t.$$

Частното решение на това диференциално уравнение е законът за движение на точката:

$$z = h - \frac{1}{2}.g.t^2.$$

От законът за движение се вижда, че при $z = 0$ материалната точка ще стигне до земната повърхност и това ще стане след време за падане t_n:

$$t_n = \sqrt{\frac{2.h}{g}}.$$

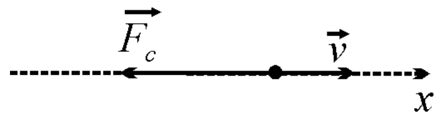
<u>Сила, зависеща само от времето</u> $\vec{F_t}$. Силата може да е с произволна посока. При зависимост от времето на първа или по-висока степен решаването на диференциалното уравнение става аналогично на това при постоянна сила, като в полученото решение времето е на по-висока степен.

<u>Съпротивителна сила</u> $\vec{F_c}$: Зависи от само от скоростта на движение на материалната точка във вискозен флуид. Получава се при взаимодействието на тялото с флуида. При ниски скорости е пропорционална на първата степен на скоростта и е обратна на нея:

$$\vec{F_c} = -\beta.\vec{v}$$

където коефициентът β се нарича коефициент на съпротивление и има размерност Нютон.секунда за метър $\left[\frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{m}}\right]$.

Под действието само на съпротивителна сила $\vec{F_c}$ при движението на материална точка с маса m е по права хоризонтална линия положението на материалната точка се отчита по ос OX с начало x = 0 мястото на получена начална скорост $v = v_0$ в начален момент от време t = 0 – фиг.4.4. Търси се законът на скоростта и за движението на точката.



Фиг.4.4.

Диференциалното уравнение на движението за текущо положение на материалната точка е:

$$m.\ddot{x} = -F_c\,.$$

Представя се като диференциално уравнение от първи ред за скоростта v и се разделят променливите:

$$m.\frac{dv}{dt} = -\beta.v \qquad \rightarrow \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}.dt\,.$$

Диференциалното уравнение се интегрира в граници съответно от v_0 до v и от 0 до t:

$$\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}.\int\limits_{0}^{t}dt \quad \rightarrow \quad \ln v\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{\beta}{m}.t\Big|_{0}^{t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{\beta}{m}.t$$

Частното решение на това диференциално уравнение е законът за скоростта на движение на точката:

$$v = v_0.e^{-\frac{\beta}{m}.t}\,.$$

От законът за скоростта се вижда, че след безкрайно дълго време материалната точка ще спре: $v = v_0.e^{-\infty} = 0$.

Този закон се представя като диференциално уравнение от първи ред за координатата x и се разделят променливите:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0.e^{-\frac{\beta}{m}.t} \qquad \rightarrow \qquad dx = v_0.e^{-\frac{\beta}{m}.t}.dt\,.$$

Диференциалното уравнение се интегрира в граници съответно от

0 до x и от 0 до t:

$$\int_0^x dx = v_0.\int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}} dt \qquad \rightarrow \qquad x\Big|_0^x = -\frac{m}{\beta}.e^{-\frac{\beta}{m}.t}\Big|_0^t .$$

Частното решение на това диференциално уравнение е законът за движение на точката:

$$x = \frac{m}{\beta}.\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}.t}\right).$$

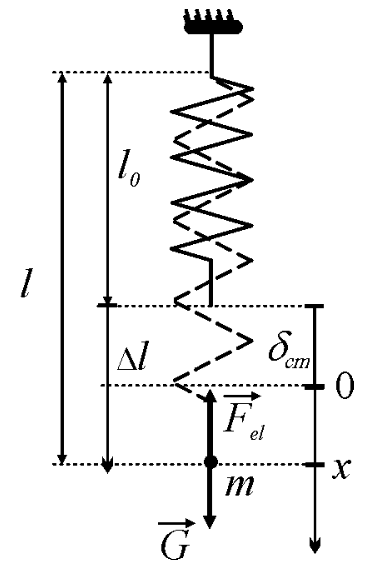
От законът за движение се вижда, че след безкрайно дълго време материалната точка ще достигне до координата $x = \frac{m}{\beta}.\left(1 - e^{-\infty}\right) = \frac{m}{\beta}$. Тази формула дава възможност при измерване на x и m да се изчисли коефициентът на съпротивление β.

<u>Еластична сила</u> $\vec{F}_{el}$: Зависи само от положението на материалната точка. Получава се при деформация на еластично тяло – фиг.4.5. При опъване деформацията $\Delta l = l - l_0$ на пружина с начална дължина l_0 до крайна дължина l еластичната сила има посока, обратна на деформа-
цията, и големина, пропорционална на деформацията:

$$\vec{F}_{el} = -k.\vec{\Delta l},$$

където коефициентът k се нарича коравина и има размерност Нютон за метър $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$.

Движението на материална точка под действие на еластична сила е периодично движение, което се повтаря с течение на времето.



Фиг.4.5.

Основното уравнение на динамиката, записано за материалната точка с маса m, на която действат силата на тежестта $\vec{G}$ и еластичната сила $\vec{F}_{el}$, има вида:

$$m.\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_{el} .$$

Уравнението се проектира по оста Ох с начало - положението на статично равновесие, при което $G = F_{el}$ при статична деформация δ_{cm} на пружината. За текущо положение на материалната точка с координата x, при което общата деформация $\Delta l = (\delta_{cm} + x)$ и след представяне на ускорението като $a \equiv \ddot{x}$, $G = m.g$, $F_{el} = k.\Delta l = k.(\delta_{cm} + x)$, диференциалното уравнение на движението добива вида:

$$m.\ddot{x} = m.g - k.\delta_{cm} - k.x .$$

Но $m.g - k.\delta_{cm} = 0$. След разделяне на масата m, въвеждане на величината кръгова честота $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и прехвърляне от лявата страна се получава каноничния вид на диференциалното уравнение на движението:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 .$$

Това е хомогенно диференциално уравнение от II ред с постоянни коефициенти. За този вид общото решение има вида:

$$x = C_1.\cos(\omega.t) + C_2.\sin(\omega.t) ,$$

където C_1 и C_2 са интеграционни константи, които се определят от началните условия на движението.

Ако движението започва при начални условия: максимално отклонение $x = x_0$ от положението на равновесие и нулева скорост $\dot{x} = v_0$ в началния момент от време $t_0 = 0$, заместването за x в общото решение определя едната от интеграционните константи:

$$x_0 = C_1.\cos(\omega.0) + C_2.\sin(\omega.0) \rightarrow \quad C_1 = x_0.$$

За използване на началното условие за скоростта се диференцира общото решение и се получава законът за скоростта:

$$\dot{x} = -C_1.\omega.\sin(\omega.t) + C_2.\omega.\cos(\omega.t).$$

След заместване на началното условие за скоростта се получава другата интеграционна константа:

$$v_0 = -C_1.\omega.\sin(\omega.0) + C_2.\omega.\cos(\omega.0) \rightarrow \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

След заместване на получените интеграционни константи се получава законът за движение на материалната точка:

$$x = x_0.\cos(\omega.t) + \frac{v_0}{\omega}.\sin(\omega.t).$$

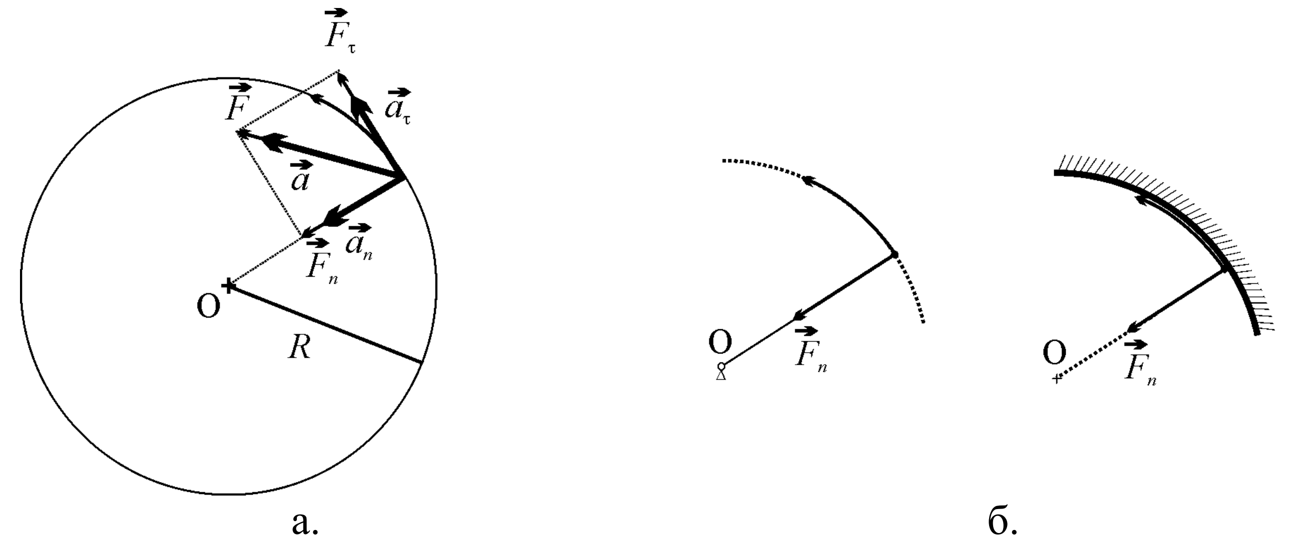
3. Динамика на материална точка при движение по окръжност.

3.1. Основно уравнение на динамиката на движение по окръжност.

При движението по окръжност пълното ускорение $\vec{a}$ на материалната точка има две проекции: тангенциално ускорение с големина $a_\tau = \varepsilon.R$ по допирателната към окръжността, свързано с ъгловото ускорение ε, и нормално ускорение с големина $a_n = \omega^2.R$, насочено към центъра на окръжността, свързано с ъгловата скорост ω.

След умножаване по масата m на материалната точка се получават силите, съответстващи на тези ускорения: общата сила $\vec{F} = m.\vec{a}$, тангенциална сила $\vec{F_\tau} = m.\vec{a_\tau}$ и нормална сила $\vec{F_n} = m.\vec{a_n}$ - фиг.4.6.а.

При движение по окръжност материалната точка не е свободна. За да се получи такова движение, трябва да има нормална сила $\vec{F_n}$, насочена винаги към центъра на окръжността и поради това наричана още центростремителна. Тя закривява траекторията на материалната точка и създава движението по окръжността. Тази сила се поражда от противодействието на други тела върху движещата се материална



Фиг.4.6.

точка, най-често силата на реакция на опората: нишка или цилиндрична повърхност - фиг.4.6.б. При отсъствие на нормална сила движението на материалната точка е праволинейно.

За да се получи движение по окръжност, е необходимо да действа и тангенциална сила $\vec{F_\tau}$, винаги насочена по допирателната към окръжността в мястото, където е моментното положение на движещата се материална точка. За да бъде изпълнено това условие, тази сила трябва да променя приложната си точка и посоката съобразно начина на движение на материалната точка. На това условие отговарят силите, които създават момент спрямо центъра на завъртане на материалната точка.

С въвеждането на величината момент на сила спрямо ос, формулата за тангенциалната сила $\vec{F_\tau} = m.\vec{a_\tau}$ се преобразува за случая на ротационно движение. Двете страни на израза за тангенциалната сила се умножават векторно по радиус-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \vec{F_\tau} = m.\ \vec{r} \times \vec{a_\tau}\ .$$

Тъй като $\vec{r}$ е перпендикулярен на $\vec{F_\tau}$ и $\vec{a_\tau}$, произведенията се извършват с големините на векторите. Тангенциалното ускорение a_τ се изразява чрез ъгловото ускорение ε: $a_\tau = r.\varepsilon$, произведението $r.F_\tau = M_z$ и се получава:

$$M_Z = m.r^2.\varepsilon\ .$$

Произведението $I = m.r^2$ се нарича инерционен момент на материалната точка. Той характеризира инертността на точката при ротационно движение. Единицата за инерционен момент в системата SI е произведение на единицата за маса по квадрата на единицата за разстояние: Нютон по метър на квадрат [N.m^2].

С въвеждането на инерционния момент се получава и крайния вид на основното уравнение на динамиката на ротационно движение:

$$M_Z = I.\varepsilon\ .$$

3.2. Диференциално уравнение на движението на материална точка по окръжност.

В основното уравнение на динамиката на ротационно движение ъгловото ускорението ε е първа производна на ъгловата скорост ω и втора производна на ъгъла на завъртане φ спрямо времето t: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. Представено по този начин в основното уравнение на динамиката на ротационно движение, ускорението ε му дава вид на диференциално уравнение на движението на материалната точка от втори ред:

$$I.\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z .$$

По отношение на ъгловата скорост ω диференциалното уравнение на движението ще бъде от първи ред и има вида:

$$I.\frac{d\omega}{dt} = M_z .$$

Означени с точка над символа на величината за всеки ред на производната спрямо времето, основното уравнение на динамиката на ротационно движение като диференциално уравнение на движението, ще има вида:

$$I.\ddot{\varphi} = M_z \qquad \text{или} \qquad I.\dot{\omega} = M_z .$$

4. Основни теореми от динамика на материална точка.

4.1. Теорема за изменение на количеството на движение.

Количество на движение $\vec{q}$ - векторна величина, която е произведение на масата m по скоростта $\vec{v}$ на материалната точка:

$$\vec{q} = m.\vec{v} .$$

Елементарен импулс на сила - векторна величина $\vec{d^*S}$, произведение на силата $\vec{F}$ по безкрайно малък интервал от време dt, за което тя действа:

$$\vec{d^*S} = \vec{F}.dt .$$

Количеството на движение и импулса на силата имат размерност килограм по метър за секунда $\left[\mathrm{kg}.\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ или Нютон по секунда [N.s].

Теорема за изменение на количеството на движение - изменението $\vec{dq}$ на количеството на движение е равно на елементарния импулс $\vec{d^*S}$ на силата:

$$\vec{dq} = d^*\vec{S}\,.$$

Това е диференциалната форма на теоремата. Тя е друга формулировка на втория принцип на динамиката. За да се докаже, от нея чрез преобразования може да се стигне до втория принцип. Изменението на импулса е $\vec{dq} = d(m.\vec{v}) = m.\vec{dv}$. След заместването на елементарния импулс от неговата дефиниция в теоремата се получава втория принцип на динамиката.

$$m.\vec{dv} = \vec{F}.dt \qquad \text{или} \qquad m.\frac{\vec{dv}}{dt} = \vec{F}\,.$$

При постоянни действащи сили след интегриране с определени интеграли от начални v_0 и t_0 до крайни v и t стойности съответно на скоростта и времето, се получава интегрална форма на теоремата:

$$m.\left(\vec{v} - \vec{v_0}\right) = \vec{F}.(t - t_0).$$

<u>Закон за запазване на количеството на движение:</u> Количеството на движение на материалната точка се запазва, ако действащата сила върху материалната точка е равна на нула:

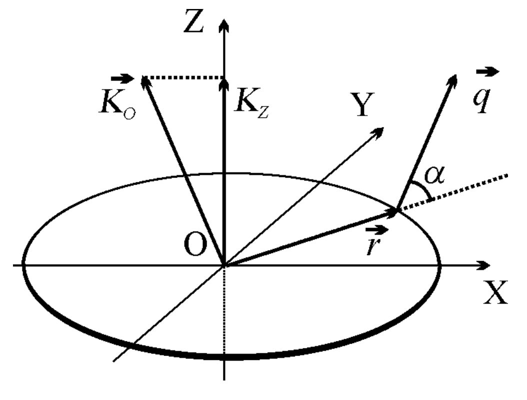
$$\vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{q} = \text{const.}$$

Законът да запазване на количеството на движение е друга формулировка на Първия принцип на Нютон. Когато количеството на движение е постоянна величина, при постоянна маса се запазва постоянна и скоростта на материалната точка.

4.2. Теорема за изменение на момента на количеството на движение.

Момент на количество на движение $\vec{K}_O$ - фиг.4.7. - векторно произведение на радиус-вектора $\vec{r}$ по количеството на движение $\vec{q}$ на материалната точка:

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{q} \ .$$



Фиг.4.7.

Моментът на количеството на движение има размерност килограм по метър на квадрат за секунда $\left[\mathrm{kg}.\dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$.

Теорема за изменение на момента на количеството на движение – за произволен център O първата производна на момента на количеството на движение спрямо времето е равна на момента на силата:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O \ .$$

Това е диференциалната форма на теоремата. За да се докаже, от нея чрез преобразования може да се стигне до втория принцип.

Първата производна на момента на количеството на движение спрямо времето е:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = m.\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m.\ \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt},$$

тъй като $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0$. След представяне на момента $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ и заместване в теоремата се получава:

$$\vec{r} \times \left(m.\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{или} \qquad m.\vec{a} = \vec{F}.$$

4.3. Теорема за изменение на кинетичната енергия.

Кинетична енергия T – скаларна величина, която характеризира състоянието на движение на материалната точка, половината от произведението на масата m и квадрата на скоростта v на точката:

$$T = \frac{m.v^2}{2}.$$

Единицата за енергия в системата SI е Джаул [J] и е еквивалентна на единицата за работа.

Елементарна работа на сила d^*A - скаларно произведение на силата $\vec{F}$ и елементарното преместване $\vec{dr}$ на материалната точка:

$$d^*A = \vec{F}.\vec{dr}.$$

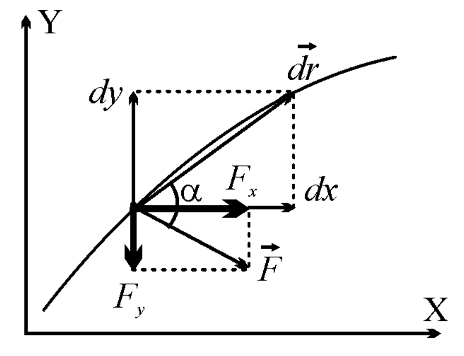
Ако силата и преместването се представят с техните проекции: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ и $\vec{dr} = (dx, dy, dz)$, скаларно произведение е:

$$d^*A = (F_x, F_y, F_z).(dx, dy, dz) = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz.$$

Скаларното произведение може да се определи и по формулата:

$$d^*A = F.dr.\cos\alpha,$$

където α е ъгълът между векторите на силата и елементарното преместване - фиг.4.8.

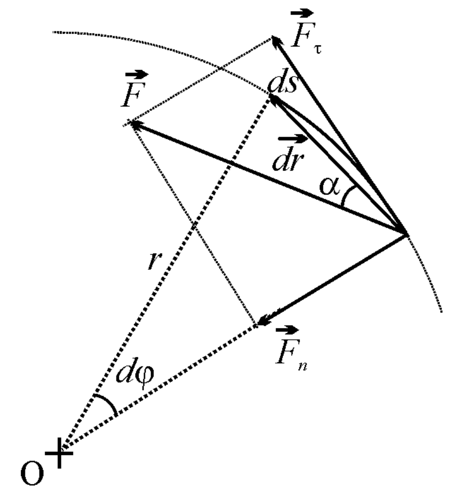


Фиг.4.8.

Единицата за работа в системата SI е произведение на единицата за сила по единицата за преместване: Нютон по метър [N.m] и е наречена Джаул [J].

Елементарна работа на момент на сила спрямо ос – произведението от момента M на силата по елементарния ъгъл на завъртане $d\varphi$.

При движение на материална точка по окръжност $F_\tau = F.\cos\alpha$ е тангенциалната проекция на силата, която създава момента на силата спрямо оста на въртене и върши работа – фиг.4.9. Работата на нормалната проекция $F_n = F.\sin\alpha$ е нула, тъй като $F_n \perp dr$ и не създава момент спрямо оста на въртене.



Фиг.4.9.

При малък ъгъл $d\varphi$ на завъртане $dr \approx ds = r.d\varphi$. От дефиниционната формула на работа на сила се получава: $A = F_\tau.r.d\varphi$. Тъй като моментът на силата е $F_\tau.r = M$, за неговата работа се получава:

$$A = M.d\varphi\,.$$

Мощност на сила - работата, извършена за единица време.

Средна мощност N_{cp} - отношението на извършената работа ΔA към интервала време Δt, за който е извършена:

$$N_{cp} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Моментна мощност N – отношението на елементарната работа d^*A към интервала от време dt, за който е извършена:

$$N = \frac{d^*A}{dt}.$$

Единицата за мощност в системата SI е отношение на единицата за работа към единицата за време: Джаул за секунда [J/s] и е наречена Ват [W].

Мощността може да се представи чрез скоростта на материалната точка, след заместване на работата:

$$N = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = F.v.\cos\alpha = F_x.v_x + F_y.v_y + F_z.v_z .$$

<u>Теорема за изменение на кинетичната енергия</u> – изменението на кинетичната енергия на материална точка е равно на елементарната работа на равнодействащата на силите:

$$dT = d^*A.$$

За доказване на теоремата се намира диференциалът на кинетичната енергия $d\left(\frac{m.v^2}{2}\right) = m.\vec{v}.d\vec{v}$. След разделяне на лявата и дясната част на dt се получава:

$$\frac{m.\vec{v}.d\vec{v}}{dt} = m.\vec{v}.\vec{a} \qquad \text{и} \qquad \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v},$$

което води до основното уравнение на динамиката $m.\vec{a} = \vec{F}$.

След разделяне на двете страни на безкрайно малкия интервал от време dt теоремата се получава, изразена чрез мощността N:

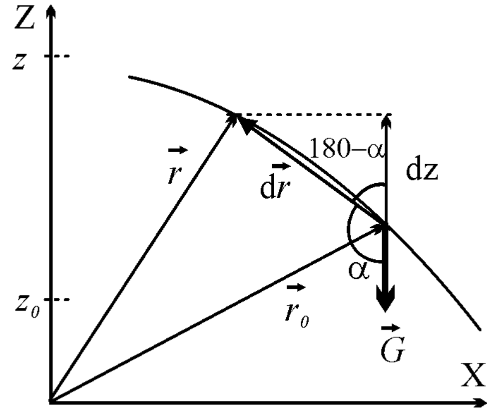
$$\frac{dT}{dt} = N .$$

След интегриране на двете страни на теоремата в диференциална форма, се получава интегралната форма на теоремата:

$$\int_{v_0}^{v} dT = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d^*A \qquad \text{или} \qquad \frac{m.v^2}{2} - \frac{m.v_0{}^2}{2} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}.d\vec{r} .$$

Работа на някои по-важни сили.

- Работа на силата на тежестта.



Фиг.4.10.

При координатна система с вертикална ос OZ с начало земната повърхност и посока нагоре – фиг.4.10., за материална точка с маса m работата на силата на тежестта $\vec{G} = (0,0,-m.g)$ за елементарно преместване $\vec{dr} = (dx, dy, dz)$ е:

$$A_G = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (0,0,-m.g).(dx, dy, dz) = -\int_{z_0}^{z} m.g.dz = -m.g.(z - z_0).$$

- Работа на еластична сила.

При движение на материална точка с маса m при действие на еластична сила F_{el} = - $c.x$ по оста OX с начало положението на статично равновесие на точката за елементарно преместване dx работата е:

$$\vec{A}_{F_{el}} = -\int_{x_0}^{x} c.x.dx = -\frac{1}{2}.c.x^2 \bigg|_{x_0}^{x} = -\frac{1}{2}.c.(x^2 - x_0{}^2).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Василев, С. Техническа механика за инженер-технолози. Автоспектър, Пловдив, 2012.

2. Дамянов, Д. Техническа механика (Записки), ТУ - Варна, 2008.

3. Кисьов, И. Техническа механика. Техника, София, 2004.

4. Попов, К., З. Начева. Теоретична механика. Техника, София, 1992.

5. Иванов, И. Техническа механика. Х.Г.Данов, Пловдив, 1978.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

Първа глава. Статика.

1. Основни понятия на статиката 2.
1.1. Основни видове тела 2.
1.2. Сила 3.
1.3. Момент на сила 4.
1.4. Двойка сили 6.
1.5. Видове натоварвания 7.
1.6. Видове опори и опорни реакции 8.
2. Аксиоми на статиката 10.
3. Конкурентна система сили. Редукция и равновесие 13.
4. Равнинна система сили. Редукция и равновесие 14.
5. Система успоредни сили. Редукция и равновесие.
Център на тежестта 18.
6. Сила на триене 21.
6.1. Същност на силата на триене 21.
6.2. Триене при плъзгане 22.
6.3. Триене при търкаляне 23.

Втора глава. Съпротивление на материалите.

1. Основни понятия на съпротивление на материалите 26.
1.1. Механични свойства на материалите 26.
1.2. Предмет и задачи на съпромата 27.
1.3. Основни принципи и хипотези на съпромата 28.

2. Метод на сечението за определяне
на вътрешните усилия 29.
2.1. Вътрешни сили 29.
2.2. Метод на сечението 29.
2.3. Механично напрежение 33.
3. Съпротивление на опън и натиск 34.
3.1. Характеристики на деформациите при опън и натиск 35.
3.2. Напрежение в напречното сечение 36.
3.3. Деформационно уравнение 37.
3.4. Механични характеристики 37.
3.5. Изчислително уравнение 38.
4. Съпротивление на срязване 40.
4.1. Характеристики на деформацията при срязване 40.
4.2. Напрежение в напречното сечение 41.
4.3. Деформационно уравнение 41.
4.4. Изчислително уравнение 42.
5. Съпротивление на огъване 43.
5.1. Характеристики на деформацията при огъване 43.
5.2. Напрежение в напречното сечение 45.
5.3. Деформационно уравнение 48.
5.4. Изчислително уравнение 49.
6. Съпротивление на усукване 51.
6.1. Величини, характеризиращи деформацията 52.
6.2. Напрежение в напречното сечение 52.
6.3. Деформационно уравнение 53.
6.4. Изчислително уравнение 54.

Трета глава. Кинематика.

1. Кинематика на материална точка 56.

1.1. Основни понятия 56.

1.2. Кинематични характеристики на движението. 58.

1.3. Праволинейно движение на материална точка 61.

2. Кинематика на материална точка при движение по окръжност 64.

2.1. Начини за описание на движението 64.

2.2. Кинематични характеристики на движението по окръжност 66.

2.3. Връзка между линейни и ъглови величини 69.

3. Кинематика на твърдо тяло 72.

3.1. Основни понятия и начин за описание на движението 72.

3.2. Прости движения на твърдо тяло 73.

3.3. Равнинно движение на твърдо тяло 76.

Четвърта глава. Динамика.

1. Динамика на материална точка 82.

1.1. Основни понятия 82.

1.2. Принципи на динамиката 82.

2. Диференциални уравнения на движението 84.

2.1. Диференциални уравнения на движението за свободна материална точка 85.

2.2. Диференциални уравнения на движението за несвободна материална точка 86.

2.3. Видове задачи на динамиката 86.

2.4. Основни случаи при обратната задача на динамиката 87.
3. Динамика на материална точка при движение
по окръжност 93.
3.1. Основно уравнение на динамиката на
ротационното движение 93.
3.2. Диференциално уравнение на движението на
материална точка по окръжност 95.
4. Основни теореми от динамика на материална точка 96.
4.1. Теорема за изменение на количеството на движение 96.
4.2. Теорема за изменение на момента на количество на
движение 99.
4.3. Теорема за изменение на кинетичната енергия 99.
Литература 103.